Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju integracije
17.06.2014.

1. (a) **[10 bod.]** Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriv prostor i $A \subseteq \mathbb{R}$. Nadalje, neka su $f, g : A \to \mathbb{R}$ izmjerive funkcije i $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pokažite da je tada funkcija $h : A \to \mathbb{R}$, $h(x) := F\left(f(x), g(x)\right)$ izmjeriva.

   (b) **[5 bod.]** Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere i $A \subseteq (0,1)$ Lebesgueov skup koji nije Borelov. Ispitajte je li funkcija $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) := \begin{cases} x, & \text{ako je } x \in A \\ -x, & \text{ako je } x \in (0,1) \backslash A \end{cases}$ izmjeriva.

2. [**10 bod.**] Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ izmjeriv prostor, te $f, g : X \to [0, \infty)$ jednostavne funkcije. Pokažite da postoji Borel–izmjeriva funkcija $h : [0,\infty) \to [0, \infty)$ takva da je $f = h \circ g$ onda i samo onda ako vrijedi $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

3. [**10 bod.**] Neka je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja, tj. $\mu(A)$ je broj elemenata skupa $A \subseteq \mathbb{N}$ i $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Dokažite da je tada
$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

4. [**10 bod.**] Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f : X \to [0, \infty]$ Σ–izmjeriva integrabilna funkcija. Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s
$$F(x) := \int \chi_{(-\infty, x]} f \, \mathrm{d}\mu$$
neprekidna na $\mathbb{R}$.

5. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom
$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ako je } x \in \mathbb{Q} \\ [1/x], & \text{inače,} \end{cases}$$
gdje $[t]$ označava cjelobrojni dio od t. Dokažite:

   (a) **[5 bod.]** f je izmjeriva funkcija.

   (b) **[5 bod.]** $\int f \, \mathrm{d}\lambda = \infty$.

6. [**10 bod.**] Neka je $\mu = 2\lambda + 4\nu$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, gdje je λ Lebesgueova mjera, a ν mjera definirana s $\nu(A) := \begin{cases} 0, & \text{za } 1 \notin A, 2 \notin A \\ 1, & \text{za } 1 \in A, 2 \notin A \\ 2, & \text{za } 1 \notin A, 2 \in A \\ 3, & \text{za } 1 \in A, 2 \in A, \end{cases}$ za $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Izračunajte $\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\mu$, ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definirana formulom $f(x) = \begin{cases} 2^{-n-1}, & \text{ako je } n-1 \le x < n, \, n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$

7. [**10 bod.**] Dokažite da je funkcija $f(x) = \mathrm{e}^{-x^{\alpha}}$, $\alpha > 0$ integrabilna na $[0, \infty)$ u smislu Lebesguea.

8. Izračunajte:

   (a) **[10 bod.]** $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{n}{\sqrt[4]{x}(1+x)^2} \left| \sin\left(\frac{3\sqrt[4]{x}}{2n}\right) \cos\left(\frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{3n^2}\right) \right| \mathrm{d}\lambda.$

   (b) **[15 bod.]** $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + x^n + \frac{1}{4n}\sin(x^{-1}e^x)} \, \mathrm{d}x.$

Dragana Jankov Maširević