Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju integracije
03.10.2012.

1. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je lokalno izmjeriv ako je $E \cap A \in \mathcal{A}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mu(A) < \infty$. Neka je $\bar{\mathcal{A}}$ familija svih lokalno izmjerivih skupova. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, za mjeru μ i prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da su zasićeni. Pretpostavimo da je μ σ–konačna mjera.

   a) [**10 bod.**] Dokažite da je mjera μ zasićena.

   b) [**5 bod.**] Definirajmo funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ formulom
   $$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ako je } E \in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{ako je } E \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A} \end{cases}.$$
   Dokažite: ako je mjera μ potpuna, onda je i $\bar{\mu}$ potpuna mjera.

2. [**10 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor i $D \subseteq \mathbb{R}$ gust skup na $\mathbb{R}$. Dokažite da je $f : X \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva onda i samo onda ako je $\{x \in X : f(x) > d\} \in \mathcal{A}$ za svaki $d \in D$.

3. [**10 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor mjere, (h_n) niz funkcija $h_n : X \to \mathbb{R}$, koji konvergira skoro uniformno prema funkciji $h : X \to \mathbb{R}$, te (g_n) niz funkcija $g_n : X \to \mathbb{R}$, koji konvergira skoro uniformno prema funkciji $g : X \to \mathbb{R}$. Pokažite da tada niz funkcija $(h_n + g_n)$ konvergira prema funkciji $h + g$, skoro uniformno na X.

4. [**10 bod.**] Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ i $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$ Σ–izmjerive funkcije. Ako je $f_n \le f$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pri čemu je $\int f \, \mathrm{d}\mu < \infty$, dokažite da je tada
   $$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

5. [**10 bod.**] Neka je μ mjera prebrojavanja na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}})$ i $f : \mathbb{N} \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija. Izračunajte čemu je jednak $\int f \, \mathrm{d}\mu$, te ispitajte koji uvjeti moraju biti ispunjeni kako bi funkcija f bila integrabilna.

6. [**10 bod.**] Dokažite da uz pretpostavke Lebesgueovog teorema o dominiranoj konvergenciji vrijedi
   $$\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

7. [**10 bod.**] Neka je $\nu = 5\lambda + 6\delta_1$ mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, gdje je λ Lebesgueova mjera, a δ_1 Diracova δ–mjera koncentrirana u točki $x_0 = 1$. Izračunajte $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\nu$, ako je funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ definirana s $f(x) := |x| \mathrm{e}^{-x^2}$.

8. Izračunajte:

   a) [**5 bod.**] $\displaystyle\int_{[20,\infty)} \frac{5}{x^2} \, \mathrm{d}\lambda.$

   b) [**10 bod.**] $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{[\frac{\pi}{2},\pi]} \sqrt[n]{\frac{|\sin x|}{x+\pi}} \mathrm{d}\lambda.$

9. [**10 bod.**] Izračunajte
   $$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-[x]} \, \mathrm{d}x,$$
   gdje je $[x]$ najveće cijelo od x.

Dragana Jankov Maširević