Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju integracije
01.02.2013.

1. Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je lokalno izmjeriv ako je $E \cap A \in \mathcal{A}$ za svaki $A \in \mathcal{A}$ takav da je $\mu(A) < \infty$. Neka je $\bar{\mathcal{A}}$ familija svih lokalno izmjerivih skupova. Očito je $\mathcal{A} \subseteq \bar{\mathcal{A}}$. Ukoliko je $\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}}$, za mjeru $\mu$ i prostor mjere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kažemo da su zasićeni. Pretpostavimo da je $\mu$ $\sigma$–konačna mjera.

   a) [**10 bod.**] Dokažite da je mjera $\mu$ zasićena.

   b) [**10 bod.**] Definirajmo funkciju $\bar{\mu} : \bar{\mathcal{A}} \to [0, \infty]$ formulom
   $$\bar{\mu}(A) = \begin{cases} \mu(E), & \text{ako je } E \in \mathcal{A} \\ \infty, & \text{ako je } E \in \bar{\mathcal{A}} \backslash \mathcal{A} \end{cases}.$$
   Dokažite: ako je mjera $\mu$ potpuna, onda je i $\bar{\mu}$ potpuna mjera.

2. [**10 bod.**] Neka je
   $$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je prebrojiv ili } A^c \text{ je prebrojiv}\}$$
   $\sigma$–algebra na $\mathbb{R}$. Pronađite sve $\mathcal{A}$–izmjerive funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$.

3. [**10 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor mjere i $f : X \to (0, 1]$ $\mathcal{A}$–izmjeriva funkcija. Pokažite da je tada ili $f = \chi_A$ (s.s.), za neki izmjeriv skup $A$, ili postoji konstanta $a \in (0, 1/2)$ tako da je
   $$\nu\left(\{x \in X : a < f(x) < 1 - a\}\right) > 0.$$

4. [**10 bod.**] Neka je $g : X \to [0, \infty]$ izmjeriva, integrabilna funkcija s obzirom na prostor mjere $(X, \Sigma, \nu)$. Nadalje, neka je
   $$A_t = \{x \in X : g(x) \geq t\},\ t > 0.$$
   Dokažite da je $\lim\limits_{t \to \infty} (t\nu(A_t)) = 0$.

5. [**10 bod.**] Neka je $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$ prostor s mjerom prebrojavanja i $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Dokažite da je tada
   $$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

6. [**10 bod.**] Neka je $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \Sigma, \mu)$. Dokažite da je funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s
   $$F(x) := \int \chi_{(-\infty, x]} f \,\mathrm{d}\mu$$
   neprekidna na $\mathbb{R}$.

7. [**5 bod.**] Pokažite da je uvjet $f_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, u Fatouovoj lemi nužan.

8. Neka je $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definirana formulom
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ [1/x], & \text{inače,} \end{cases}$$
   gdje $[t]$ označava cjelobrojni dio od $t$. Dokažite:

   a) [**5 bod.**] $f$ je izmjeriva funkcija.

   b) [**10 bod.**] $\int f \,\mathrm{d}\lambda = \infty$.

9. [**10 bod.**] Izračunajte
   $$\lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x\,.$$

Dragana Jankov Maširević