Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Strojarski fakultet
Trg Ivane Brlić-Mažuranić 18
35 000 Slavonski Brod

Slavonski Brod, 25. studenog 2006.

Seminarski rad iz "Matematike"
na poslijediplomskom doktorskom studiju

Newtonova metoda za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$

Nataša Veljić[1],

Sažetak. U ovom seminarskom radu analizira se Newtonova metoda za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$, gdje je $f \in C^2[a, b]$ funkcija zadan na intervalu $[a, b]$. Dane su osnovne karakteristike i svojstva ove metode. Izrađen je odgovarajući *Mathematica*–modul pomoću kojega je analizirana metoda na nekoliko ilustrativnih primjera.

Ključne riječi: Newtonova metoda, nultočke funkcije

Abstract. (Newton's method for solving a nonlinear equation $f(x) = 0$) In this seminar paper Newton's method for solving equation $f(x) = 0$ is analysed, where $f \in C^2[a, b]$ is a function defined on the interval $[a, b]$. Basic characteristics and properties of this method are given. A corresponding *Mathematica* module is made by means of which the method is analysed on several illustrative examples.

Keywords: Newton's method, roots of a function

AMS Mathematical Classifications (2000): 65H05

Nastavnici: doc. dr. sc. Mirta Benšić, prof. dr. sc. Rudolf Scitovski

Datum preuzimanje seminara	Datum predaje seminara	Ocjena	Datum	Potpis

[1] e-mail: natasa.veljic@sfsb.hr

1 Uvod

Promatramo realnu neprekidnu funkciju f definiranu na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Općenito, svaki kompleksni broj ξ, koji je rješenje jednadžbe

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

nazivamo nultočkom funkcije f. Mi ćemo se ograničiti na istraživanje samo realnih nultočaka funkcije f (sjecišta grafa funkcije s osi x). Općenito se može dogoditi da neka funkcija ima više realnih nultočaka, da su neke višestruke ili da uopće nema realnih nultočaka.

Ako je funkcija f neprekidna na intervalu $I = [a, b]$ i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti (tj. ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$), onda (vidi Jukić (2000), str. 120), postoji barem jedna točka $\xi \in I$, za koju vrijedi $f(\xi) = 0$. Ako je, osim toga, prva derivacija f' stalnog predznaka na intervalu I, onda je to i jedina nultočka funkcije f na intervalu I. Na taj se način posao oko traženja realnog rješenja jednadžbe (1) svodi na dva koraka:

1. Separirati interval I, u kome funkcija ima nultočku,
2. Nekom iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću.

Spomenuti interval $I = [a, b]$, u kome se nalazi barem jedna nultočka funkcije f, treba odrediti tako da na njegovim rubovima funkcija prima vrijednosti suprotnog predznaka, tj. da bude

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

2 Newtonova metoda

Pretpostavimo da smo na neki način odredili interval $I = [a, b]$, u kome se nalazi jedinstvena nultočka neprekidne i dovoljno "glatke" funkcije f za koju je $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$. Izaberimo početnu aproksimaciju $x_0 \in I$, razvijmo funkciju f u Taylorov red u okolini točke x_0 i zadržimo se na linearnom članu. Tako smo funkciju f u okolini točke x_0 aproksimirali linearnom funkcijom

$$f_1(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

čiji graf je tangenta na graf funkcije f u točki x_0.

Sada ćemo umjesto rješavanja jednadžbe (1), rješavati jednadžbu $f_1(x) = 0$ (geometrijski gledano, umjesto traženja sjecišta grafa funkcije f s osi x, tražimo sjecište tangente s osi x). Rješenje jednadžbe $f_1(x) = 0$ označimo s x_1

$$x_1 := x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ponavljajući postupak, dobivamo niz $x_0, x_1, \dots$ zadan rekurzivnom formulom[2]

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots \tag{2}$$

[2] U literaturi često ovu metodu možemo naći pod imenom *Newton-Raphsonova metoda*.

Važno je primijetiti da u svakoj iteraciji konstruiramo lokalni aproksimant funkcije f i onda tražimo nultočku lokalnog aproksimanta.

Ako je x_n jedna aproksimacija nultočke ξ u intervalu $I = [a, b]$ i ako je f derivabilna funkcija, takva da je $|f'(x)| > 0$, $x \in I$, onda iz Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti (vidi primjerice [1]) slijedi ovakva ocjena apsolutne pogreške n-te aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad \text{gdje je } \ 0 < m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|. \tag{3}$$

O konvergenciji Newtonove metode može se vidjeti u [2], [3], [6]. Vrijedi slijedeći teorem (dokaz vidi primjerice u [6]):

Teorem 1 *Neka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $I = [a, b]$. Neka je nadalje, $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prva (f') i druga (f'') derivacija funkcije f na intervalu I imaju stalan predznak.*

Tada, ako je $x_0 \in I$ izabran tako da bude

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \tag{4}$$

niz definiran s (2) konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Pri tome vrijedi ocjena pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \tag{5}$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|, \quad M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|,$$

a metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \tag{6}$$

3 Numerički eksperimenti

Na nekoliko numeričkih i praktičnih primjera, a na bazi vlastitog programa izrađenog u programskom sustavu *Mathematica* ilustrirat ćemo prednosti i nedostatke Newtonove metode.

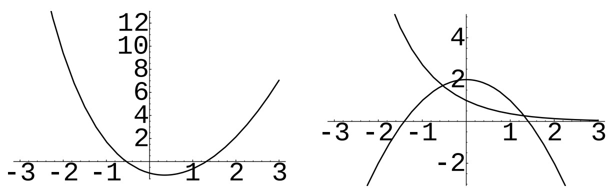
Primjer 1 *S točnošću $\epsilon = 0.00005$ (4 signifikantne decimale) treba odrediti pozitivnu nultočku funkcije*

$$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2.$$

Ova funkcija ima dvije nultočke. Jednu možemo lokalizirati u intervalu $I_1 = [-1, 0]$ a druga u intervalu $I_2 = [1, 2]$ (*Slika 1*). Mi ćemo potražiti nultočku iz intervala $[1, 2]$. Kako je $f'(x) = -e^{-x} + 2x$, funkcija f je rastuća na intervalu I_2 i imamo $m_1 = f'(1) \geq 1.6$, a kako je $f(2) \cdot f''(2) > 0$ za početnu aproksimaciju izabrat ćemo $x_0 = 2$.

Nakon 3 iteracije dobivamo $x^* = 1.3160$. Tijek iterativnog procesa prikazan je u *Tablici 1* (g_0 je desna strana ocjene (3). Primijetite da sama vrijednost funkcije još uvijek nije manja od ε.

$f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ $\qquad$ $x \mapsto e^{-x}, \quad x- > \mapsto 2 - x^2$



Slika 1: Lokalizacija nultočaka

n	x_n	g_0	$f(x_n)$
0	2	1.334585	2.135336
1	1.4475	0.206462	0.330339
2	1.3233	0.010823	0.017316
3	1.3160	0.000037	0.000060

Tablica 1 *Tijek iterativnog procesa*

Niže je naveden modul `NewtonMethod` kojim se uz primjenu Newtonove metode traži nultočka funkcije.

```
In[1]:= NewtonMethod[f_, x0_, m1_, eps_, Imax_, ind_] := Module[{x = x0, n = 0},
              (* f - funkcija *)
              (* x0 - pocetna aproksimacija *)
              (* m1 - broj iz ocjene (3) *)
              (* eps - tocnost *)
              (* Imax - maksimalno dozvoljen broj iteracija *)
              (* ako je ind = 0, nece se ispisivati iterativni proces; u protivnom, hoce *)
        While[N[Abs[f[x]]/m1] > eps && n < Imax,
           If[ind != 0,
               Print[" x_", n, " = ", x, ",  pogreska = ", f[x]/m1, ",  f(x_", n,")=", f[x]//N]];
                  x = N[x - f[x]/f'[x]]; n = n + 1];
          {n, x}]
```

koji uz poziv

```
In[1]:= f[x_] := Exp[-x] + x^2 - 2;
        NewtonMethod[f, 2, 1.6, .00005, 10, 0]
```

daje broj potrebnih iteracija i vrijednost dobivene aproksimacije nultočke

```
Out[3]:= {3, 1.316}
```

Literatura

[1] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[2] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[3] R. Plato, *Concise Numerical Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[4] R. Plato, *Numerische Mathematk kompakte*, Vieweg Verlag, München, 1962. http://www.ams.org/bookpages/gsm-57

[5] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[6] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[7] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*, 8. Auflage, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

[8] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.