Metoda konačnih diferencija za obične diferencijalne jednadžbe

1 Uvod

Promatramo Chyjev problem[1] (vid primjerice [1], [3], [6])

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y,y'), \\ y(a) = \alpha, &\quad y'(a) = \beta \end{aligned} \tag{1}$$

Jednostavnom supstitucijom $y_1 := y \quad y_2 := y'$ problem (1) prelazi u novi Chyjev problem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(a) &= \alpha \\ y_2' &= f(x,y_1,y_2), & y_2(a) &= \beta \end{aligned}$$

koji se lakše rješava.

Drugi problem koji se često promatra u literaturi (vidi [1], [3], [6]) je tzv. rubni problem[2]

$$\begin{aligned} y'' &= f(x,y,y'), \\ y(a) = \alpha, &\quad y(b) = \beta \end{aligned} \tag{2}$$

Primjer 1 *Potražimo rješenje rubnog problema*

$$\begin{aligned} y'' &= -y, \\ y(0) = 3, &\quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 7 \end{aligned}$$

Opće rješenje gornje diferencijalne jednadžbe je funkcija $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$*. Uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo:* $C_1 = 3$, $C_2 = 7$*. Rješenje rubnog problema je dakle funkcija* $y(x) = 3 \cos x + 7 \sin x$*.*

Zadatak 1 *Korištenjem programskog sustava* Mathematica *nacrtajte graf funkcije rješenja iz prethodnog primjera i točke* $T_0(0,3)$ *i* $T_1(\frac{\pi}{2},7)$*.*

Zadatak 2 *Pokažite da sljedeći rubni problem nema rješenja*

$$\begin{aligned} y'' &= -y, \\ y(0) = 3, &\quad y(\pi) = 7. \end{aligned}$$

Jedna klasa metoda za rješavanje rubnog problema (2) su iterativne metode (tzv. shootins methods) koje koriste poznato rješenje problema (1) uz povoljno odabranu vrijednost $y'(a)$ i neku metodu za rjesavanje nelinearne jednadžbe.

Zadatak 3 *Izradite* Mathematica*-program za implementaciju Shootings metode za rješavanje rubnih problema za obične diferencijalne jednadžbe i testirajte ga na nekoliko primjera. Literatura: [1], [3], [6])*

Druga klasa metoda za rješavanje problema (2) su tzv. metode konačnih diferencija (ili metode diskretizacije) (vidi primjerice [1], [3], [4]).

[1] en: Initial Value Problem, de: Anfangswertproblem
[2] en: Two-Point Boundary-Value Problem, de: Randwertproblem

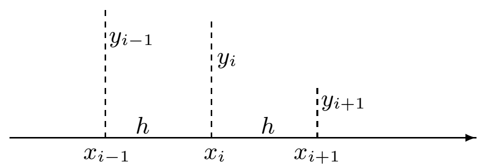
2 Metoda konačnih diferencija

Promatramo rubni problem (2)

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

Načinimo subdiviziju intervala $[a, b]$ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b$, gdje je $x_i = a + i\,h$, $\quad h = \frac{b-a}{n+1}$. Prvu derivaciju funkcije y u točki x_i možemo definirati na sljedeće načine (vidi primjerice [4] i *Sliku* 1)

$$\begin{array}{rcll} \Delta y_i & = & \frac{1}{h}\,(y_{i+1} - y_i) & \text{– desna razlika} \\ \nabla y_i & = & \frac{1}{h}\,(y_i - y_{i-1}) & \text{– lijeva razlika} \\ \delta y_i & = & \frac{1}{2}(\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2h}\,(y_{i+1} - y_{i-1}) & \text{– centralna razlika} \end{array}$$



Slika 1. *Definiranje kvocijenta diferencija*

Zadatak 4 *Provjerite da vrijedi* $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$.

Drugu derivaciju funkcije y u točki x_i možemo definirati na sljedeće načine (vidi *Sliku* 1)

$$\begin{array}{rcl} \Delta^2 y_i & = & \Delta(\Delta y_i) = \Delta\left(\frac{1}{h}\,(y_{i+1} - y_i)\right) = \frac{1}{h}\,(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) = \\ & = & \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\,(y_{i+2} - y_{i+1}) - \frac{1}{h}\,(y_{i+1} - y_i)\right] = \frac{1}{h^2}\,(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) \\ \Delta(\nabla y_i) & = & \Delta\left(\frac{1}{h}\,(y_i - y_{i-1})\right) = \frac{1}{h}\,(\Delta y_i - \Delta y_{i-1}) = \\ & = & \frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\,(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{h}\,(y_i - y_{i-1})\right] = \frac{1}{h^2}\,(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})\,. \end{array}$$

Sada rubni problem (2) možemo napisati u diskretiziranom obliku kao sustav (općenito nelinearnih) jednadžbi

$$\begin{array}{c} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2\, f\left(x_i, y_i, \frac{1}{2h}\,(y_{i+1} - y_{i-1})\right), \qquad i = 1, \ldots, n \\ y_0 = \alpha, \quad y_{n+1} = \beta \end{array} \tag{3}$$

ili u matričnom obliku

$$\mathbf{A}\,\mathbf{y} = h^2 \mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{r}, \tag{4}$$

gdje je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

$f_i = f\left(x_i, y_i, \frac{1}{2h}\,(y_{i+1} - y_{i-1})\right)$.

2.1 Slučaj linearne diferencijalne jednadžbe

Pretpostavimo da je u rubnom problemu (2) funkcija f zadana s

$$f(x,y,y') = u(x) + v(x)y + w(x)y'.$$

U tom slučaju diskretizacija (3) izgleda ovako:

$$\begin{array}{c} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2\,\left[u_i + v_i y_i + \frac{w_i}{2h}\,(y_{i+1} - y_{i-1})\right], \qquad i = 1,\dots,n \\ y_0 = \alpha, \quad y_{n+1} = \beta, \end{array} \tag{5}$$

gdje je $u_i = u(x_i)$, $v_i = v(x_i)$, $w_i = w(x_i)$, što se može zapisati na sljedeći način

$$c_{i-1}y_{i-1} + a_i y_i + b_i y_{i+1} = d_i, \qquad i = 1,\dots,n,$$

gdje je

$$\begin{array}{lll} a_i = 2 + h^2 v_i, & d_i = -h^2 u_i, & i = 1,\dots,n, \\ b_i = -1 + \frac{1}{2}hw_i, & c_{i-1} := -1 - \frac{1}{2}hw_i, & i = 1,\dots,n. \end{array}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \alpha c_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n - \beta b_n \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Matrica sustava (6) je trodijagonalna, a uz uvjet da je $v_i > 0$, $i = 1,\dots,n$ i h dovoljno malen ($|\frac{1}{2}hw_i| < 1$) ona je i dijagonalno dominantna. Naime, vrijedi

$$|a_i| - |b_i| - |c_{i-1}| = 2 + h^2 v_i - \left(1 - \frac{1}{2}hw_i\right) - \left(1 + \frac{1}{2}hw_i\right) = h^2 v_i > 0.$$

Primjer 2 *Korištenjem programskog sustava* Mathematica *metodom konačnih diferencija riješit ćemo rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu iz* Primjera *1. U ovom slučaju je*

$$\begin{array}{lllll} a = 0, & b = \frac{\pi}{2}, & h = \frac{b-1}{n+1}, & y_0 = 3, & y_{n+1} = 7, \\ u(x) = 0, & v(x) = -1, & w(x) = 0, & & \end{array}$$

a sustav (6) postaje

$$\begin{bmatrix} 2 - h^2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 - h^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 - h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \vdots \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobit ćemo vrijednosti y_i tražene funkcije y u diskretnom skupu točaka $x_1,\dots,x_n$.

Za rješavanje ovog sustava koristit ćemo LU-dekompoziciju i ranije konstruiran modul `LUtri`, koji efikasno koristi specijalnu i rijetku strukturu trodijagonalne dijagonalno dominantne matrice.

Najprije ćemo učitati ulazne podatke

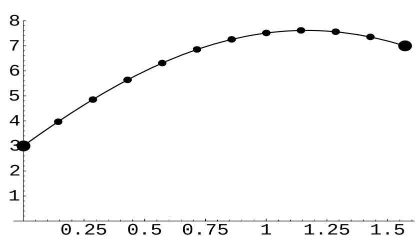
```
In[1]:= (* y'' = -y;   y[0] = 3,  y[Pi/2] = 7 *)
        yy[t_] := 3Cos[t] + 7Sin[t];
        A = 0; B = Pi/2; alpha = 3; beta = 7;
        u[x_] := 0; v[x_] := -1; w[x_] := 0;
        n = 10; h = (B - A)/(n + 1);
```

Nakon toga definirat ćemo točke $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, elemente matrice sustava (6) i vektor slobodnih koeficijenata

```
In[2]:= x = Table[A + i h, {i, 0, n + 1}];
           a = Table[2 + h^2v[x[[i]]], {i, n}];
               b = Table[-1 + .5h w[x[[i]]], {i, n}];
                   c = Table[-1 - .5h w[x[[i + 1]]], {i, n}];
                       d = Table[-h^2u[x[[i]]], {i, n}];
        d[[1]] = d[[1]] + (1 + .5h w[x[[1]]])alpha; d[[n]] = d[[n]] - b[[n]]beta;
```

Nakon poziva modula `LUtri` na jedan koordinatni sustav nacrtat ćemo graf funkcije y, točke $T_0(a, \alpha)$ i $T_1(b, \beta$, te diskretne vrijednosti $y_1, \ldots, y_n$ tražene funkcije y

```
In[3]:= y = LUtri[n, a, b, c, d];
        slf = Plot[yy[t], {t, A, B}, PlotRange -> {0, 8}, DisplayFunction -> Identity];
          rub = ListPlot[{{A, alpha}, {B, beta}}, PlotStyle -> AbsolutePointSize[5],
                         DisplayFunction -> Identity];
            sol = ListPlot[Table[{x[[i + 1]], y[[i]]}, {i, n}], PlotStyle -> AbsolutePointSize[3],
                           DisplayFunction -> Identity];
        Show[slf, rub, sol, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```



Zadatak 5 *Koristeći navedeni* Mathematica-*program metodom konačnih diferencija riješite rubni problem*

$$y'' = 2e^x - y,$$
$$y(0) = 2, \quad y(1) = e + \cos 1.$$

Zbog kontrole egzaktno rješenje možete dobiti na sljedeći način

```
In[4]:= DSolve[{y''[x] == 2Exp[x] - y[x], y[0] == 2, y[1] == E + Cos[1]}, y[x], x]
```

Literatura

[1] D. Kincaid, W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/cole Publishing company, New York, 1996.

[2] G. Dahlquist, A. Björck *Numerische Methoden*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1972. (postoji i engleski prijevod)

[3] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, cambridge University Press, cambridge, 1989.

[4] А. А. Самарский, Введение б численные методы, Наука, Москва, 1982.

[5] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[6] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993