Odjel za matematiku, Sveučilište J.J Strossmayera u Osijeku

Numerička matematika, 2013./2014.

Prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
Ivan Papić

Domaće zadaće

Studenti koji žele postići bolju ocjenu iz ovog predmeta mogu izraditi neke od niže navedenih domaćih zadaća. Pojedini zadatak priznat će se prvom studentu koji ga riješi i njegovo rješenje objavit će se uz zadatak. Naknadna rješenja istog zadatka također će se priznavati ako je student samostalno izradio zadatak - što će procijeniti predmetni asistent.

Domaće zadaće pišu se u LaTeX2e i šalju u `pdf` formatu na e-mail adresu NMDZ@mathos.hr. Pri tome treba koristiti zadani stil. Ako su ilustracije ili primjeri rađeni u programskom sustavu *Mathematica*, priložite i odgovarajuću `.nb` datoteku. U "subject" e-mail-a stavite "NM-DZ".

Zadatak 1. (maksimalno 20 bodova)
Neka je $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ skup dekadskih znamenki. Za izabrani $a_0 \in \mathcal{Z}$ i diskretnu uniformnu slučajnu varijablu A na $\mathcal{Z}$ definiramo diskretnu slučajnu varijablu $X_{a_0} = |A - a_0|$. Odredite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju ove slučajne varijable uz odgovarajuće ilustracije i primjere.

Zadatak 2. (maksimalno 20 bodova)
Zadana je matrica

$$A[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$. Odredite $\det A[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. *Specijalno, odredite determinantu* $\det A[0, 1, \ldots, n]$ *i broj uvjetovanosti $\operatorname{cond} A[0, 1, \ldots, n]$ za $n = 1, 2, 3, 5, 10, 20$.*

Zadatak 3. (maksimalno 20 bodova)
Neka su $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b$ čvorovi interpolacije. Izračunajte integral funkcije

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i p_i(x),$$

u granicama od x_0 *do* x_n*, gdje su* p_i *tzv. hat-funkcije*

$$p_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \quad 0, & \textit{inače} \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$p_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \textit{inače} \end{cases} \qquad p_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \textit{inače} \end{cases},$$

koje imaju svojstvo

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Pokažite da za ekvidistantno raspoređene čvorove dobivamo poznato generalizirano trapezno pravilo.

Zadatak 4. (maksimalno 20 bodova)
Za neprekidnu funkciju $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *čije vrijednosti* $y_0, y_1, \ldots, y_n$ *poznajemo u* $(n+1)$ *čvorova* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$*, odredite kvadratni interpolacijski spline* $Q : [a, b] \to \mathbb{R}$*.*

Zadatak 5. (maksimalno 20 bodova)
Za dani skup točaka $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n\colon i = 1, \ldots, m\}$ *treba odrediti točku – geometrijski medijan* $c \in \mathbb{R}^n$ *tako da suma euklidskih udaljenosti od svih točaka* a^i *do točke* c *bude minimalna. Definirajte funkciju cilja i iterativni postupak za traženje geometrijskog medijana. Izradite odgovarajući program i primjere.*

Zadatak 6. (maksimalno 20 bodova)
Za dani skup točaka $\mathcal{A} = \{a^i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^n\colon i = 1, \ldots, m\}$ *treba odrediti točku* $c \in \mathbb{R}^n$ *tako da*

a) suma l_1 *udaljenosti od svih točaka* a^i *do točke* c *bude minimalna;*

b) suma kvadrata euklidskih udaljenosti od svih točaka a^i *do točke* c *bude minimalna;*

Definirajte funkcije cilja. Mogu li se ovi problemi riješiti eksplicitno ?

Zadatak 7. (maksimalno 10 bodova)
Na prostoru $C[0, +\infty\rangle$ *definiran je skalarni produkt* $(f, g) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} f(x) g(x) dx$.
(a) *Napišite Gramovu matricu* $G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *za sustav funkcija*

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Je li ona regularna ?
(b) *Odredite najbolju aproksimaciju funkcije* $f\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ *na potprostoru* $\mathcal{P} = L(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.

Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 8. (maksimalno 10 bodova)
Pokažite da je sustav trigonometrijskih funkcija

$$\tfrac{1}{2}, \sin x, \cos x, \dots, \sin nx, \cos nx,$$

na $C[-\pi,\pi]$ *sa skalarnim produktom* $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ *ortogonalan sustav, pri čemu su odgovarajuće norme funkcija jednake*

$$\|\tfrac{1}{2}\| = \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}, \quad \|\sin kx\| = \|\cos kx\| = \sqrt{\pi}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zadatak 9. (maksimalno 10 bodova)
Pokažite da svi Fourierovi koeficijenti $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx$ *neparne funkcije* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *iščezavaju i da svi Fourierovi koeficijenti* $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx$ *parne funkcije* $f\colon [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ *iščezavaju.*

Zadatak 10. (maksimalno 10 bodova)
Neka je $f \in C^1[-\pi,\pi]$ *periodična funkcija temeljnog perioda* 2π*. Pokažite da je tada i njena prva terivacija* f' *periodična funkcija temeljnog perioda* 2π*.*

Zadatak 11. (maksimalno 20 bodova)
Pokažite da Čebiševljevi polinomi imaju sljedeća svojstva:

a) $|T_n(x)| \le 1, \quad x \in [-1,1], \quad n = 0, 1, \dots;$

b) *Čebiševljev polinom* T_n *ima na intervalu* $[-1,1]$ n *različitih nultočaka*

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{n}\frac{\pi}{2}\right),\ k = 1, \dots, n;$$

c) *Čebiševljev polinom* T_n *na intervalu* $[-1,1]$ *ima* $n+1$ *različitih točaka*

$$\xi_k = \cos\frac{k\pi}{n},\ k = 0, 1, \dots, n,$$

u kojima naizmjenično postiže globalne minimume i maksimume;

d) $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, *a za* $n = 1, 2, \dots$ *vrijedi rekurzivna formula:*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots.$$

Zadatak 12. (maksimalno 20 bodova)
Pokažite da za Legendreove polinome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \quad n \in \mathbb{N},$$

vrijedi

a) *Svojstvo ortogonalnosti*

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n, \quad m,n = 0,1,\dots \end{cases}$$

b) *Legendreov polinom* P_n*,* $n \geq 1$*, u intervalu* $(-1,1)$ *ima* n *jednostrukih nultočaka.*

c) $P_0(x) = 1$*,* $P_1(x) = x$*, a za* $n = 1,2,\dots$ *vrijedi rekurzivna formula:*

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x).$$

d) *Primjenom* Mathematica-*naredbe* ***LegendreP[n,x]*** *odredite nekoliko Legendreovih polinoma i nacrtajte njihove grafove.*

Zadatak 13. (maksimalno 30 bodova)
Za prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ *izračunajte*

$$\inf_{a_i \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\right)^2 dx.$$

Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 14. (maksimalno 20 bodova)
Zadane su dvije krivulje drugog reda

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0,\ a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}\},$$
$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + b_0 = 0,\ b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22} \in \mathbb{R}\}.$$

(a) Uz koje uvjete na parametre će krivulje K_1, K_2 *biti elipse ?*
(b) Ako su K_1, K_2 *elipse, uz koje dodatne uvjete na parametre će biti* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ *?*
(c) Ako su K_1, K_2 *elipse koje se ne sijeku, kako odrediti njihovu međusobnu udaljenost*

$$d(K_1, K_2) = \min\{d(u,v) \colon u \in K_1,\ v \in K_2\}\,?$$

(d) Pokažite da su

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 12x + 20y + 4 = 0\},$$
$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 72x + 64y + 260 = 0\}.$$

elipse koje se ne sijeku. Izračunajte $d(K_1, K_2)$*.*
Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 15. (maksimalno 20 bodova)
Neka je $f \in C^4[a,b]$*. Pokažite da tada postoji* $c \in [a,b]$*, tako da bude:*

$$E = \int_a^b (f(x) - P_2(x)\,dx = -\frac{(b-a)^5}{90} f^{(4)}(c),$$

gdje je P_2 *interpolacijski polinom koji prolazi točkama:* $T_0 = (a, f(a))$*,* $T_1 = \left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right)$*,* $T_2 = (b, f(b))$*.*