Numerička matematika
Prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
Ivan Vazler

Domaće zadaće

Studenti koji žele postići bolju ocjenu iz ovog predmeta mogu izraditi neke od niže navedenih domaćih zadaća. Domaće zadaće pišu se u LaTeX2e i šalju u pdf formatu na e-mail adresu asistenta. Pri tome treba koristiti zadani stil. Ako su ilustracije ili primjeri rađeni u *Mathematica*-i, priložite i odgovarajuću .nb datoteku. U "subject" e-mail-a stavite "DZ-NM".

Zadatak 1. (maksimalno 20 bodova)
Neka je $\mathcal{Z} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ skup dekadskih znamenki. Za izabrani $a_0 \in \mathcal{Z}$ i diskretnu uniformnu slučajnu varijablu A na $\mathcal{Z}$ definiramo diskretnu slučajnu varijablu $X_{a_0} = |A - a_0|$. Odredite očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju ove slučajne varijable uz odgovarajuće ilustracije i primjere.

Zadatak 2. (maksimalno 30 bodova)
Zadan je sustav linearnih jednadžbi $Ax = y$, gdje je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ trodijagonalna matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(a) *Uz koje uvjete postoji jedinstvena LU-dekompozicija matrice $\boldsymbol{A}$?*

(b) *Izvedite formule za LU-dekompoziciju matrice A.*

(c) *Na osnovi poznavanja LU-dekompoziciju matrice A napišite eksplicitno rješenje sustava $Ax = y$.*

(d) *Primijenite dobivenu specijalizaciju LU-dekompozicije za određivanje prirodnog kubičnoh splinea.*

Zadatak 3. (maksimalno 5 bodova)
Neka je $f \in C^2[a, b]$ funkcija za koju vrijedi

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) > 0, \quad \forall x \in [a, b].$$

Skicirajte njezin graf i pokažite da tada Newtonov iterativni proces $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 \in [a, b]$ konvergentan uz uvjet da je $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Zadatak 4. (maksimalno 5 bodova)
Neka je $f \in C^2[a,b]$ *funkcija za koju vrijedi*

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0, \quad f'(x) < 0, \quad f''(x) < 0, \quad \forall x \in [a,b].$$

Skicirajte njezin graf i pokažite da tada Newtonov iterativni proces $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $x_0 \in [a,b]$ *konvergentan uz uvjet da je* $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Zadatak 5. (maksimalno 5 bodova)
Pokažite da se rekurzivna formula kod metode sekanti može dobiti izravno iz Newtonove metode tangenti tako da se $f'(x_n)$ *aproksimira podijeljenom razlikom.*

Zadatak 6. (maksimalno 10 bodova)
Odredite neprekidnu funkciju $F\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, *tako da bude* $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [0,5]$, *gdje je*

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \\ x, & 2 \le x \le 3 \\ -2x+9, & 3 \le x \le 4 \\ 2x-7, & 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

Je li funkcija F *Lipschitz neprekidna? Ako je, odredite pripadnu Lipschitzovu konstantu* $L > 0$. *Nacrtajte grafove funkcija* f *i* F.

Zadatak 7. (maksimalno 15 bodova)
Pokažite da je sustav funkcija

$$\tfrac{1}{2}, \sin x, \cos x, \ldots, \sin nx, \cos nx$$

ortogonalan na $[-\pi,\pi]$ *sa skalarnim produktom* $(f,g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)$. *Odredite odgovarajuće* L_2 *norme tih funkcija.*

Zadatak 8. (maksimalno 20 bodova) *Zadani su podaci* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ *i odgovarajuća linearna regresija* $f(x) = \alpha x + \beta$, *gdje je*

$$\alpha = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \qquad \beta = \bar{y} - \alpha \bar{x}, \qquad \text{gdje je} \quad \bar{x} = \tfrac{1}{m}\sum x_i, \quad \bar{y} = \tfrac{1}{m}\sum y_i.$$

Pokažite da tada vrijedi

$$a)\ \sum (x_i - \bar{x}) = 0; \qquad \sum (y_i - \bar{y}) = 0; \qquad \sum (y_i - f(x_i)) = 0,$$

b) Centroid $(\bar{x}, \bar{y})$ *leži na grafu linearne regresije.*

Zadatak 9. (maksimalno 10 bodova)
Na prostoru $C[0,+\infty\rangle$ *definiran je skalarni produkt* $(f,g) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} f(x)g(x)dx$.
(a) *Napišite Grammovu matricu* $G(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ *za sustav funkcija*

$$\varphi_i(x) = x^i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Je li ona regularna ?
(b) *Odredite najbolju aproksimaciju funkcije* $f\colon [0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ *na potprostoru* $Y = L(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$.
Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 10. (maksimalno 30 bodova)
Za prirodni broj $n \in \mathbb{N}$ *izračunajte*

$$\inf_{a_i \in \mathbb{R}} \int_0^{+\infty} e^{-x} \Big(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n\Big)^2 \, dx.$$

Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 11. (maksimalno 20 bodova)
Zadane su dvije krivulje drugog reda

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1 x + a_2 y + a_0 = 0,\ a_0, a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}\},$$
$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + b_1 x + b_2 y + b_0 = 0,\ b_0, b_1, b_2, b_{11}, b_{12}, b_{22} \in \mathbb{R}\}.$$

(a) *Uz koje uvjete na parametre će krivulje* K_1, K_2 *biti elipse ?*
(b) *Ako su* K_1, K_2 *elipse, uz koje dodatne uvjete na parametre će biti* $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ *?*
(c) *Ako su* K_1, K_2 *elipse koje se ne sijeku, kako odrediti njihovu međusobnu udaljenost*

$$d(K_1, K_2) = \min\{d(u,v)\colon u \in K_1,\ v \in K_2\}\,?$$

(d) *Pokažite da su*

$$K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 5x^2 + 6xy + 5y^2 + 12x + 20y + 4 = 0\},$$
$$K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 72x + 64y + 260 = 0\}.$$

elipse koje se ne sijeku. Izračunajte $d(K_1, K_2)$.
Izradite grafičke prikaze koji će ilustrirati problem.

Zadatak 12. (maksimalno 20 bodova)
Vektor parametara model funkcije $y = f(x; \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, *procjenjuje se na osnovi podataka* (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$, $m \geq n$ *traženjem globalnog minimuma funkcije*

$$F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} r_i^2(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \|r(\mathbf{a})\|_2^2, \quad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je $\mathbf{r}$ *vektor odstupanja (reziduala) s komponentama* $r_i(\mathbf{a}) = f(x_i; \mathbf{a}) - y_i$. *Pokažite da se gradijent i Hessijan funkcije* F *može zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} &\mathrm{grad} F = \mathbf{J}^T \mathbf{r}, \\ &\mathbf{H}_F = \mathbf{J}^T \mathbf{J} + \sum_{k=1}^{m} \mathbf{r}_k \mathbf{H}_k, \qquad (\mathbf{H}_k)_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}_k}{\partial a_i \partial a_j}, \end{aligned}$$

gdje je $\mathbf{J}$ *Jacobijeva matrica funkcije* F

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial r_1}{\partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_m}{\partial a_1} & \cdots & \frac{\partial r_m}{\partial a_n} \end{bmatrix}.$$

Zadatak 13. (maksimalno 20 bodova)
Neka je $f \in C^4[a,b]$. *Pokažite da tada postoji* $c \in [a,b]$, *tako da bude:*

$$E = \int_a^b (f(x) - P_2(x)\, dx = -\frac{(b-a)^5}{90} f^{(4)}(c),$$

gdje je P_2 *interpolacijski polinom koji prolazi točkama:* $T_0 = (a, f(a))$, $T_1 = \left(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2})\right)$, $T_2 = (b, f(b))$.