

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

- (a) Šalica oblika valjka visine $h = 10 \pm 0.001$ cm i polumjera baze $r = 3 \pm 0.001$ cm napunjena je tekućinom, a zatim nagnuta pod kutem $\varphi = 10 \pm 1^\circ$, izljevajući dio tekućine. Kolika je najveća pogreška u volumenu V preostale tekućine u litrama?
- (b) Za koliko znamenki volumena V možemo reći da je signifikantno?

Zadatak 2. [20 bodova]

Izračunajte kubični interpolacijski spline koji interpolira funkciju $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ u točkama $x_0 = 0, x_1 = \pi/3, x_2 = \pi$.

Zadatak 3. [20 bodova]

- (a) Jesu li funkcije $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin x$ i $\varphi_3(x) = \cos x$ međusobno ortogonalne na intervalu $[-2, 2]$?
- (b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = (x-1)^2$ na intervalu $[-2, 2]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$.

Zadatak 4. [20 bodova]

Primjenom Newtonove metode treba odrediti minimum funkcije $f: [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \cos x - 4 \sin x$. Provjerite ispunjava li na tom intervalu funkcija uvjete konvergencije Newtonove metode. Ako zadovoljava, odredite početnu točku i sljedeće dvije iteracije.

Zadatak 5. [20 bodova]

- (a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[1, 4]$, tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_1^4 \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x + 1} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$?
Na koliko dijelova bismo trebali podijeliti ako koristimo generaliziranu trapeznu formulu?
- (b) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_1^4 \frac{x^4 - 3x^3 + 1}{x + 1} dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$.