

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) U nekoj drvenoj industriji debla se rezbare u krnje stošce visine $d = 1\text{m}$ s polumjerima baza $a = 10\text{cm}$ i $b = 5.5\text{cm}$. Pri mjerenju volumena dobivenih krnjih stožaca izmjereno je najveće odstupanje od očekivanog volumena $\Delta V = 2\text{cm}^3$.

Kolika je najveća pogreška u dimenzijama a, b i d ako pretpostavimo da sve jednako utječu na volumen? Volumen stošca je $V = B \cdot v/3$ gdje je B površina baze a v visina stošca. Za π uzmite da iznosi 3.14159 i pretpostavite da ne pridonosi pogrešci.

(b) Za koliko znamenki radijusa b možemo reći da je signifikantno?

Zadatak 2. [20 bodova] Poznat je interpolacijski polinom $P_2(x) = 3x^2 - 5x - 2$, koji prolazi točkama $T_0 = (-1, 6)$, $T_1 = (0, -2)$, $T_2 = (2, 0)$.

(a) Koristeći to, odredite interpolacijski polinom P_3 koji prolazi točkama T_0, T_1, T_2 i $T_3 = (1, 0)$ (računanje interpolacijskog polinoma ispočetka se neće bodovati!).

(b) Uz primjenu Hornerove sheme odredite vrijednost interpolacijskog polinoma P_3 u točki $\hat{x} = 4$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Jesu li funkcije $\varphi_1(x) = 1$ i $\varphi_2(x) = x^2$ međusobno ortogonalne na intervalu $[0, \pi]$?

(b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \sin^2 x$ na intervalu $[0, \pi]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$.

Zadatak 4. [20 bodova]

Primjenom Newtonove metode treba odrediti minimum funkcije $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos x - 3 \sin x$. Provjerite ispunjava li na tom intervalu funkcija uvjete konvergencije Newtonove metode. Ako zadovoljava, odredite početnu točku i sljedeće dvije iteracije.

Zadatak 5. [20 bodova]

(a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[-1, 1]$, tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala $\int_{-1}^1 \ln(3 + x^2) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$?

(b) Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala $\int_{-1}^1 \ln(3 + x^2) dx$ s točnošću $\epsilon = 0.005$.