Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
2. travnja 2012.

### 1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

**Zadatak 1.** [15 bodova]
(a) *Što znači da približni broj* $a^* = b_m^* \times 10^m + b_{m-1}^* \times 10^{m-1} + \cdots$ *ima* $n$ *signifikantnih znamenki ? Odredite broj signifikantnih znamenki broja* $a = 0.003527 \pm .0005$ *i prema tome ga zaokružite.*

(b) *Ako je poznato* $x_1 = 1 \pm 0.005$, $x_2 = 1 \pm 0.005$, $x_3 = 0.1 \pm 0.005$ *napišite vrijednost i apsolutnu pogrešku funkcije* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 e^{-2x_3}$ *u točki* $(1, 1, 0.1)$.

**Zadatak 2.** [25 bodova]
(a) *Uz koji uvjet na podatke* $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ *postoji jedinstveni interpolacijski polinom* $n$*-tog stupnja ?*

(b) *Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki* $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

(c) *Koje metode za određivanje interpolacijskog polinoma poznajete ? Primjenom Lagrangeove metode odredite interpolacijski polinom koji prolazi točkama* $T_0 = (1, -2)$,$T_1 = (2, 2)$, $T_2 = (-2, -26)$, $T_3 = (3, 14)$.

**Zadatak 3.** [20 bodova]
*Poznate su vrijednosti funkcije* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
(a) *Napišite uvjete na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*
(b) *Za točke* $T_0 = (0, 10), T_1 = (1, 12), T_2 = (2, 10), T_3 = (3, 12)$ *odredite vrijednosti drugih derivacija prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima interpolacije.*

**Zadatak 4.** [25 bodova]

a) *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a, b]$, *koja na intervalu* $[a, b]$ *ima nultočku* $\xi$. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija* $f : [-1.5, -0.5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ *prethodno navedene uvjete ? Ako zadovoljava, ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = -0.9$ *nultočke funkcije* $f$, *ako je* $f(\bar{x}) \approx 0.171$.

c) *Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije nultočke funkcije* $f$ *na intervalu* $[-1.5, -0.5]$.

**Zadatak 5.** [25 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$.

b) *Za funkciju* $f$ *iz prethodnog zadatka definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

c) *Koliko bi iteracija trebalo napraviti da bi se postigla točnost* $\varepsilon = 0.000005$ *?*

---

**Napomena:** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
2. travnja 2012.

**1. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike**

**Zadatak 1.** [15 bodova]
(a) *Što znači da približni broj* $a^* = b_m^* \times 10^m + b_{m-1}^* \times 10^{m-1} + \cdots$ *ima n signifikantnih znamenki? Odredite broj signifikantnih znamenki broja* $a = 3.14579 \pm .005$ *i prema tome ga zaokružite.*

(b) *Ako je poznato* $x_1 = 1 \pm 0.005$, $x_2 = 1 \pm 0.005$, $x_3 = 0.1 \pm 0.005$ *napišite vrijednost i apsolutnu pogrešku funkcije* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 e^{-2x_3}$ *u točki* $(1, 1, 0.1)$.

**Zadatak 2.** [25 bodova]
(a) *Uz koji uvjet na podatke* $(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ *postoji jedinstveni interpolacijski polinom n-tog stupnja?*

(b) *Napišite formulu za ocjenu pogreške interpolacijskog polinoma u točki* $\bar{x} \in [x_0, x_n]$.

(c) *Koje metode poznajete za određivanje interpolacijskog polinoma? Primjenom Newtonove metode odredite interpolacijski polinom koji prolazi točkama* $T_0 = (1, -1)$,$T_1 = (2, 3)$, $T_2 = (-2, -37)$, $T_3 = (3, 23)$.

**Zadatak 3.** [20 bodova]
*Poznate su vrijednosti funkcije* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *u točkama* $T_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.
(a) *Napišite uvjete na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*
(b) *Za točke* $T_0 = (0, 2), T_1 = (1, 6), T_2 = (2, 4), T_3 = (3, 4)$ *odredite vrijednosti drugih derivacija prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima interpolacije.*

**Zadatak 4.** [25 bodova]

a) *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a, b]$, *koja na intervalu* $[a, b]$ *ima nultočku* $\xi$. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija* $f : [0.5, 1.5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ *prethodno navedene uvjete? Ako zadovoljava, ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = .9$ *nultočke funkcije* $f$, *ako je* $f(\bar{x}) \approx -0.171$.

c) *Metodom bisekcije odredite prve dvije aproksimacije nultočke funkcije* $f$ *na intervalu* $[0.5, 1.5]$.

**Zadatak 5.** [25 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$. *Pokažite da metoda jednostavnih iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

b) *Za funkciju* $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x - 1$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

c) *Počevši od* $x_0 = 1$, *odredite prve dvije aproksimacije.*

---

**Napomena:** Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama.