Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
14. travnja 2011.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [30 bodova]
(a) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da vrijedi $f'(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, koja na intervalu $[a, b]$ ima nultočku ξ. Ako je $\bar{x}$ neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

(b) *Netko tijekom 15 godina na početku svake godine uplati neki iznos $a > 0$. Na kraju petnaeste godine dobit će sumu svihu uplaćenih iznosa uvećanu za 50% (tj. dobit će $22.5a$). Pokažite da se godišnja kamatna stopa p koja se primjenjuje u ovoj financijskoj transakciji može odrediti rješavanjem jednadžbe $r^{16} - 23.5r + 22.5 = 0$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$.*

(c) *Zadovoljava li funkcija $f\colon [1.03, 1.1] \to \mathbb{R}$, $f(r) = r^{16} - 23.5r + 22.5$ uvjete navedene pod (a) ?*

(d) *Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije $\bar{r} = 1.05$, u kojoj funkcija f postiže vrijednost $f(\bar{r}) \approx 0.00787459$.*

Zadatak 2. [30 bodova]
(a) *Neka je $a > 0$. Pokažite da je niz zadan rekurzivnom formulom $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_0 > \sqrt{a}$, $n = 0, 1, \ldots$ konvergentan i da konvergira prema jedinstvenoj nultočki funkcije $f\colon [0, \max\{a, 1\}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - a$.*

Zadatak 3. [20 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$.*

b) *Za funkciju $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 4$ definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$.*

Zadatak 4. [30 bodova]
Ako za funkciju $f \in C^2[a, b]$ vrijedi: $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) < 0$ za svaki $x \in [a, b]$ i ako je $x_0 \in [a, b]$ izabran tako da bude $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, pokažite da tada Newtonov iterarivni postupak konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Zadatak 5. [10 bodova]

a) *Kada za funkciju $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je Lipschitzova ? Je li svaka Lipschitzova funkcija ujedno i derivabilna*

b) *Jesu li sljedeće funkcije Lipschitzove ? Ako jesu odredite odgovarajuće Lipschitzove konstante.*

$$(i)\, f\colon [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 + 6x^2, \qquad (ii)\, g\colon [1, 8] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 2 \\ -\frac{3}{2}x + 7, & 2 \le x \le 4 \\ \frac{1}{4}x, & x > 4 \end{cases}$$

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
14. travnja 2011.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [30 bodova]
(a) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da vrijedi $f'(x) > 0$, $\forall x \in [a, b]$, koja na intervalu $[a, b]$ ima nultočku ξ. Ako je $\bar{x}$ neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

(b) *Netko tijekom 13 godina na početku svake godine uplati neki iznos $a > 0$. Na kraju trinaeste godine dobit će sumu svihu uplaćenih iznosa uvećanu za 73% (dobit će $22.5a$). Pokažite da se godišnja kamatna stopa p koja se primjenjuje u ovoj financijskoj transakciji može odrediti rješavanjem jednadžbe $r^{14} - 23.5r + 22.5 = 0$, gdje je $r = 1 + \frac{p}{100}$.*

(c) *Zadovoljava li funkcija $f : [1.05, 1.1] \to \mathbb{R}$, $f(r) = r^{14} - 23.5r + 22.5$ uvjete navedene pod (a)?*

(d) *Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije $\bar{r} = 1.06$, u kojoj funkcija f postiže vrijednost $f(\bar{r}) \approx -0.149096$.*

Zadatak 2. [30 bodova]
(a) *Neka je $a > 1$. Pokažite da je niz zadan rekurzivnom formulom $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n^2}\right)$, $x_0 > \sqrt[3]{a}$, $n = 0, 1, \ldots$ konvergentan i da konvergira prema jedinstvenoj nultočki funkcije $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - a$.*

Zadatak 3. [20 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$.*

b) *Za funkciju $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x - 5$ definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$.*

Zadatak 4. [30 bodova]
Ako za funkciju $f \in C^2[a, b]$ vrijedi: $f(a) \cdot f(b) < 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ za svaki $x \in [a, b]$ i ako je $x_0 \in [a, b]$ izabran tako da bude $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, pokažite da tada Newtonov iterarivni postupak konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$.

Zadatak 5. [10 bodova]

a) *Kada za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je Lipschitzova? Je li svaka Lipschitzova funkcija ujedno i derivabilna?*

b) *Jesu li sljedeće funkcije Lipschitzove? Ako jesu odredite odgovarajuće Lipschitzove konstante.*

$$(i)\, f : [0, 4] \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^3 + 9x^2 + 3, \qquad (ii)\, g : [0, 9] \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x + 2, & x < 3 \\ -2x + 12, & 3 \le x \le 4 \\ -\frac{2}{5}x + \frac{28}{5}, & x > 4 \end{cases}$$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim zadaćama).