

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [15 bodova] *Odredite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju oplošja kuglinog isječka $O = \pi R(2v + r)$, ako su parametri zadani s $R = 5.5 \pm 0.0005\text{cm}$, $v = 0.5 \pm 0.001\text{cm}$, $r = 2.8 \pm 0.001$ a broj $\pi \approx 3.141$. Koliki je broj signifikantnih znamenki broja $V^* = 3.141 \cdot 5.5 \cdot (2 \cdot 0.5 + 2.8)$?*

Rješenje: $V^* = 65.6469$, $\Delta V^* = 0.0701809$, $\delta V = 0.00106907$.

Zadatak 2 [15 bodova] *Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama $T_0(-2, 4)$, $T_1(-1, 3)$, $T_2(0, 8)$, $T_3(2, -12)$, $T_4(5, 18)$.*

[Rješenje: koeficijenti u Newtonovom obliku su redom $\{4, -1, 3, -2, 1/2\}$]

Zadatak 3 [20 bodova] *Neka je dana funkcija $f(x) = \ln(x + 3) - x^2 + x + 2$.*

a) *Separirajte sve nultočke funkcije f .*

b) *Metodom bisekcije odredite pozitivnu nultočku funkcije s točnošću $\varepsilon = 0.08$.*

Rješenje: $x_{\text{approx}} = 2.4375$

Zadatak 4 [15 bodova] *Zadani su podaci (i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ i model-funkcija $f(x; a, b, c) = \cos(ax) + b \sin(cx)$. Postavite problem najmanjih kvadrata za ovu model-funkciju i podatke. Napišite Jacobijan J u točki (a, b, c) i provjerite je li aproksimacija Hessijana $J^T J$ u točki $(\frac{\pi}{2}, 1, \pi)$ pozitivno definitna matrica.*

Zadatak 5 [15 bodova] *Ortogonalizirajte sustav funkcija $\{1, t^3, 9t^5\}$ s obzirom na skalarni produkt $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ i dobivenu ortogonalnu bazu označite sa $\{\psi_0, \psi_1, \psi_2\}$. Izračunajte $\|\psi_1\|_2$ (ako je težinska funkcija $\omega \equiv 1$).*

Zadatak 6 [20 bodova] *Primjenom Simpsonove formule odredite potreban broj koraka da bi se odredila približna vrijednost integrala $I = \int_{-1}^1 (x^2 + 1)e^x dx$ te primjenom Simpsonove formule uz točnost $\varepsilon = 0.05$ odredite približnu vrijednost integrala.*

Rješenje: $I = 3.24143$, $n = 4$,