Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**
11. svibnja 2010.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

a) *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija, takva da vrijedi $|f'(x)| > 0$, $\forall x \in [a,b]$, koja na intervalu $[a,b]$ ima nultočku ξ. Ako je $\bar{x}$ neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija $f : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - \frac{5}{4}$ prethodno navedene uvjete? Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije $\bar{x} = .65$, u kojoj funkcija f postiže vrijednost $f(\bar{x}) \approx 0.015$. Koliko decimala aproksimacije $\bar{x}$ su korektne?*

Zadatak 2. [30 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$. Pokažite da metoda iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

b) *Za funkciju $f : [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 2x - 8$ definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$.*

c) *Počevši od $x_0 = 2$, odredite prve dvije aproksimacije.*

Zadatak 3. [30 bodova]

a) *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ padajuća konveksna funkcija, koja na intervalu $[a,b]$ ima jedinstvenu nultočku ξ. Ako je $x_0 < \xi$, pokažite da je niz (x_n) dobiven Newtonovom metodom tangenti ograničen odozgo.*

b) *Provjerite, ispunjava li funkcija f iz* Zadatka 2 *na intervalu $[2,3]$ uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti? Ako ispunjava, kako treba izabrati početnu aproksimaciju x_0?*

c) *Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete?*

Zadatak 4. [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice.*

b) *Sljedeći sustav ima dva rješenja.*

$$\begin{aligned} x - 4y + 4 &= 0 \\ x^2 + 4y^2 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Provjerite je li $x_1 = (-4, 0)$ jedno od rješenja. U cilju pronalaženja drugog rješenja, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odedite sljedeću aproksimaciju.

Zadatak 5. [20 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija f da bi odgovarajući fourireov red bio konvergentan?*

b) *Zadana je funkcija $f : [-3,3] \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = |2x - x^2|$$

Kako od funkcije f možete sagraditi funkciju $\tilde{f}$ definiranu na intervalu $[-\pi, \pi]$? Skicirajte obje funkcije.

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
11. svibnja 2010.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

a) *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0,\ \forall x \in [a,b]$, *koja na intervalu* $[a,b]$ *ima nultočku* ξ. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija* $f : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - \frac{3}{2}$ *prethodno navedene uvjete? Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = .85$, *u kojoj funkcija* f *postiže vrijednost* $f(\bar{x}) \approx -0.01$. *Koliko decimala aproksimacije* $\bar{x}$ *su korektne?*

Zadatak 2. [30 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$. *Pokažite da metoda iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

b) *Za funkciju* $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x - 1$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

c) *Počevši od* $x_0 = 1$, *odredite prve dvije aproksimacije.*

Zadatak 3. [30 bodova]

a) *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *padajuća konkavna funkcija, koja na intervalu* $[a,b]$ *ima jedinstvenu nultočku* ξ. *Ako je* $x_0 > \xi$, *pokažite da je niz* (x_n) *dobiven Newtonovom metodom tangenti ograničen odozdo.*

b) *Provjerite, ispunjava li funkcija* f *iz* Zadatka 2 *na intervalu* $[1,2]$ *uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti? Ako ispunjava, kako treba izabrati početnu aproksimaciju* x_0 ?

c) *Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete?*

Zadatak 4. [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice.*

b) *Sljedeći sustav ima dva rješenja.*

$$\begin{aligned} x - 4y + 3 &= 0 \\ 4x^2 + 9y^2 - 36 &= 0 \end{aligned}$$

Provjerite je li $x_1 = (-3, 0)$ *jedno rješenje? U cilju pronalaženja drugog rješenja, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odedite sljedeću aproksimaciju.*

Zadatak 5. [20 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. *Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija* f *da bi odgovarajući fourireov red bio konvergentan?*

b) *Zadana je funkcija* $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \max\{x - 1, 3x\}$$

Kako od funkcije f *možete sagraditi funkciju* $\tilde{f}$ *definiranu na intervalu* $[-\pi, \pi]$? *Skicirajte obje funkcije.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **C**
11. svibnja 2010.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

a) *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivabilna funkcija, takva da vrijedi* $|f'(x)| > 0, \forall x \in [a,b]$, *koja na intervalu* $[a,b]$ *ima nultočku* ξ. *Ako je* $\bar{x}$ *neka aproksimacija te nultočke, na osnovi Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti izvedite formulu za ocjenu pogreške te aproksimacije.*

b) *Zadovoljava li funkcija* $f : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - x - \frac{4}{3}$ *prethodno navedene uvjete ? Ocijenite apsolutnu pogrešku aproksimacije* $\bar{x} = .73$, *u kojoj funkcija* f *postiže vrijednost* $f(\bar{x}) \approx 0.012$. *Koliko decimala aproksimacije* $\bar{x}$ *su korektne ?*

Zadatak 2. [30 bodova]

a) *Iskažite teorem o konvergenciji za metodu jednostavnih iteracija za rješavanje jednadžbe* $f(x) = 0$. *Pokažite da metoda iteracija ima linearnu brzinu konvergencije.*

b) *Za funkciju* $f : [4,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 15x - 8$ *definirajte odgovarajući iterativni postupak, koji će po metodi jednostavnih iteracija voditi prema rješenju jednadžbe* $f(x) = 0$.

c) *Počevši od* $x_0 = 5$, *odredite prve dvije aproksimacije.*

Zadatak 3. [30 bodova]

a) *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *rastuća konveksna funkcija, koja na intervalu* $[a,b]$ *ima jedinstvenu nultočku* ξ. *Ako je* $x_0 > \xi$, *pokažite da je niz* (x_n) *dobiven Newtonovom metodom tangenti ograničen odozgo.*

b) *Provjerite, ispunjava li funkcija* f *iz* Zadatka 2 *na intervalu* $[4,5]$ *uvjete teorema o konvergenciji Newtonove metode tangenti ? Ako ispunjava, kako treba izabrati početnu aproksimaciju* x_0 *?*

c) *Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete ?*

Zadatak 4. [20 bodova]

a) *Napišite Newtonov iterativni postupak za rješavanje sustava dvije nelinearne jednadžbe s dvije nepoznanice.*

b) *Sljedeći sustav ima dva rješenja.*

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 - 16 &= 0 \\ x - 4y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Provjerite je li $x_1 = (4,0)$ *jedno rješenje ? U cilju pronalaženja drugog rješenja, izaberite početnu aproksimaciju i Newtonovom metodom odedite sljedeću aproksimaciju.*

Zadatak 5. [20 bodova]

a) *Napišite Fourierov polinom i Fourierove koeficijente funkcije* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. *Koje uvjete mora zadovoljavati funkcija* f *da bi odgovarajući fourireov red bio konvergentan ?*

b) *Zadana je funkcija* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+1), & x \in [-1,0] \\ x(x-1), & x \in [0,1] \end{cases}$$

Kako od funkcije f *možete sagraditi funkciju* $\tilde{f}$ *definiranu na intervalu* $[-\pi, \pi]$ *? Skicirajte obje funkcije.*

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).