3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova]

a) *Kako se definira* L_p $(p \geq 1)$ *norma na vektorskom prostoru* $C[a,b]$ *neprekidnih funkcija na intervalu* $[a,b]$

b) *Odredite* $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ *i* $\|f\|_\infty$ *za funkciju* $f:[0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$ *(težinska funkcija neka je* $w(x)=1$*).*

R: b) $\|f\|_1$=2, $\|f\|_2=\sqrt{\frac{46}{15}}$ *i* $\|f\|_\infty = 3$

Zadatak 2 [25 bodova] a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija* $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2 \in C[a,b]$ *?* b) *Pronađite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 1/3\\ 1, & x>1/3\end{cases}$ *na potprostoru svih polinoma stupnja* ≤ 1 *(težinska funkcija neka bude* $\omega\equiv 1$*)*

c) *Odredite pogrešku aproksimacije.*

R: b) $Ga=y$, *gdje je* $G=\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 1/2 & 1/3\end{bmatrix}$ *Hilbertova matrica, a* $y=(\frac{2}{3},\frac{4}{9})^T$. $f^*(x)=\frac{4}{3}x$. *c)* $\sqrt{\frac{2}{27}}=.27$

Zadatak 3 [25 bodova] a) *Iskažite Dirichletov teorem.*

b) *Odredite Fourierov polinom funkcije* $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ -1, & x>0\end{cases}$.

c) *Napišite Fourierov polinom za funkciju* $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ -1, & x>0\end{cases}$.

R: b) $F_n(x)=-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sin x-\frac{2}{3\pi}\sin 3x-\frac{2}{5\pi}\sin 5x+\cdots$.

Zadatak 4 [25 bodova] a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi ?.*

b) *Koristeći Čebiševljeve polinome odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sign}(x)$ *uz težinsku funkciju* $w(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *?*

R: b) $\begin{bmatrix}(T_0,T_0) & 0\\ 0 & (T_1,T_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(T_0,f)\\ (T_1,f)\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\pi & 0\\ 0 & \frac{\pi}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$, $f^*(x)=\frac{4}{\pi}x$

Zadatak 5 [25 bodova] a) *Što znači odrediti najbolje* L_∞ *rješenje sustava* $Ax=b$ *?.*

b) *Odredite najbolje* L_∞ *rješenje sustava* $Ax=b$, *gdje je* $A=(1,2,-1)^T$, $b=(3,1,0)^T$

R: a) minimizirati $F(x)=\|b-Ax\|_\infty$ *b)* $x^*=\frac{4}{3}$, $F(x^*)=5/3$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
27. svibnja 2009.

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Zadatak 1 [20 bodova]

a) *Kako se definira* L_p $(p \geq 1)$ *norma na vektorskom prostoru* $C[a,b]$ *neprekidnih funkcija na intervalu* $[a,b]$

b) *Odredite* $\|f\|_1$, $\|f\|_2$ *i* $\|f\|_\infty$ *za funkciju* $f : [1,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$ *(težinska funkcija neka je* $w(x) = 1$*).*

R: b) $\|f\|_1=4$, $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{166}{15}}$ *i* $\|f\|_\infty = 5$

Zadatak 2 [25 bodova] a) *Kako se definira Grammova matrica linearno nezavisnih funkcija* $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]$ *?* b) *Pronađite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2/3 \\ 1, & x > 2/3 \end{cases}$ *na potprostoru svih polinoma stupnja* ≤ 1 *(težinska funkcija neka bude* $\omega \equiv 1$*)*

c) *Odredite pogrešku aproksimacije.*

R: b) $Ga = y$, *gdje je* $G = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{bmatrix}$ *Hilbertova matrica, a* $y = (\frac{1}{3}, \frac{15}{32})^T$. $f^*(x) = -\frac{1}{3} - \frac{4}{3}x$. *c)* $\sqrt{\frac{2}{27}} = .27$

Zadatak 3 [25 bodova] a) *Iskažite Dirichletov teorem.*

b) *Odredite Fourierov polinom funkcije* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.

c) *Napišite Fourierov polinom za funkciju* $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$.

R: b) $F_n(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots$.

Zadatak 4 [25 bodova] a) *Kako se definiraju Čebiševljevi polinomi ?.*

b) *Koristeći Čebiševljeve polinome odredite najbolju* L_2 *aproksimaciju funkcije* $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\operatorname{sign}(x)$ *uz težinsku funkciju* $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *?*

R: b) $\begin{bmatrix} (T_0,T_0) & 0 \\ 0 & (T_1,T_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (T_0,f) \\ (T_1,f) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \frac{\pi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $f^*(x) = \frac{4}{\pi}x$

Zadatak 5 [25 bodova] a) *Što znači odrediti najbolje* L_∞ *rješenje sustava* $Ax = b$ *?.*

b) *Odredite najbolje* L_∞ *rješenje sustava* $Ax = b$, *gdje je* $A = (1,3,-1)^T$, $b = (4,1,0)^T$

R: a) minimizirati $F(x) = \|b - Ax\|_\infty$ *b)* $x^* = \frac{5}{4}$, $F(x^*) = 11/4$

Napomena Rješavanjem svih zadataka možete postići maksimalno 120 bodova (čime ćete moći kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama).