

3. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike

Ak. god. 2009./2010.

Zadatak 1 [25 bodova] (a) *Napišite formule za koeficijente a_k, b_k Fourierovog polinoma*

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \text{ funkcije } f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}.$$

(b) *U kojem slučaju svi koeficijenti a_1, \dots, a_n iščezavaju?*

(c) *Odredite Fourierov polinom drugog stupnja funkcije $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{2}$.*

R: [(b) Ako je f neparna funkcija; (c) $F_2(x) = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x$]

Zadatak 2 [15 bodova] (a) *Zadani su podaci mjerenja $y = (y_1, \dots, y_n)$. Što je najbolja l_1 , a što najbolja l_2 aproksimacija mjerenja?*

(b) *Odredite najbolju l_1 i najbolju l_2 aproksimaciju mjerenja $y = (2, 5, 10, 4, 2, 3, 10)$.*

R: [medijan med $(y) = 4$, aritmetička sredina $\bar{y} \approx 5.14$;]

Zadatak 3 [25 bodova] (a) *Zadane su točke u ravnini $(-2, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 4)$. Odredite pravac $y = ax + b$, koji će u smislu metode najmanjih kvadrata biti najbliži svim zadanim točkama.*

(b) *Navedite jedan primjer linearnog i jedan primjer nelinearnog problema najmanjih kvadrata.*

(c) *Koje metode za rješavanje linearnog problema najmanjih kvadrata poznajete?*

R: [$y = 2.4 + 0.4x$]

Zadatak 4 [25 bodova] (a) *Za funkciju $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ napišite trapeznu formulu za određivanje približne vrijednosti I^* integrala $I = \int_a^b f(x) dx$ i ocjenu apsolutne pogreške ΔI^* .*

(b) *Ako je poznat broj $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ i tražena točnost $\epsilon > 0$, na koliko najmanje dijelova treba podijeliti interval $[a, b]$, tako da apsolutna pogreška ΔI^* ne premaši traženu točnost ϵ ?*

(c) *S točnošću $\epsilon = 0.5$ odredite približnu vrijednost integrala $I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$. Kolika je točna vrijednost integrala?*

R: [(c) $n = 2$; $I^ = 4.6$; $I = \frac{14}{3} \approx 4.66667$]*

Zadatak 5 [20 bodova] (a) *Napišite Eulerov iterativni proces za rješavanje Cauchyjevog problema početne vrijednosti $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$*

(b) *Ako je $f(x, y) = \sin x + \frac{y}{2}$ i $y(2) = 2$, odredite približnu vrijednost tražene funkcije $x \mapsto y(x)$ u točki $x_1 = 2.2$.*

R: [(c) $y_1 = 2.38186$]

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 110 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugim kolokvijima).