Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku **A**
17. prosinca, 2009.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike
Ak. god. 2009./2010.

Zadatak 1 [20 bodova] *Zadan je sustav linearnih jednadžbi* $Ax = b$, *gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 9 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) *Kako se definira broj uvjetovanosti* $\mathrm{cond}\,(A)$ *kvadratne matrice* A? *Odredite broj uvjetovanosti zadane matrice* A.

(b) *Kako će se promijeniti rješenje* x *sustava, ako se vektor slobodnih koeficijenata promijeni za* Δb, *a matrica* A *ostane nepromijenjena?*

. *[(a)* $\mathrm{cond}\, A = \|A\| \|A^{-1}\| = 25.333, \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -0.9 & 2 \\ 9 & -10 \end{bmatrix}$ *]*

Zadatak 2 [20 bodova] *Primjenom* LU*-dekompozicije riješi sustav linearnih jednadžbi* $Ax = b$, *ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} = L \cdot U, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

. *[*$z^* = (1., 1.5, 1.5)^T$, $x^* = (3., -1., -3.)^T$*]*

Zadatak 3 [20 bodova]

(a) *Napišite u matričnom obliku Jacobijevu i Gauss–Seidelovu iterativnu metodu za rješavanje sustava* $Ax = b$.

(b) *Zadan je sustav* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Počevši s početnom iteracijom* $x^{(0)} = (0,0)^T$ *izračunajte sljedeće dvije iteracije primjenom Jacobijeve i Gauss–Seidelove iterativne metode. Hoće li ovi procesi konvergirati? Zašto?*

.*[(a) J:* $x^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$, *GS:*$x^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + D^{-1}b$, $D = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$,
(b) J: $x^1 = (1,1)^T$, $x^2 = (.5, 1.5)^T$; *GS:* $x^1 = (1, 1.5)^T$, $x^2 = (.25, 1.125)^T$ *]*

Zadatak 4 [20 bodova]

(a) *Jednadžbu* $2x^2 - x - 1 = 0$, $x \in [0,2]$ *napiši u obliku pogodnom za rješavanje metodom jednostavnih iteracija. Odredite broj* q.

(b) *Za* $x_0 = 0$, *izračunajte sljedeće dvije iteracije.*

. *[(a)* $x = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$, $q = \frac{\sqrt{2}}{4}$, *(b)* $x_1 = 0.707107$, $x_2 = 0.92388$ *]*

Zadatak 5 [20 bodova]

(a) *Pod kojim uvjetima na funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *Newtonova metoda tangenti konvergira prema jedinstvenoj nultočki* $\xi \in [a,b]$?

(b) *Izaberite interval* $[a,b]$ *i početnu aproksimaciju* $x_0 \in [a,b]$ *tako da Newtonova metoda tangenti za funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 1$ *konvergira i izračunajte sljedeće dvije iteracije.*

. *[(b)* $x_0 = 2 \in [.5, 2]$, $\quad x_1 = 1.28571$, $x_2 = 1.03941$ *]*

Zadatak 6 [20 bodova]

(a) Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete ?

(b) Za funkciju iz prethodnog primjera izračunajte nekoliko iteracija jednom od spomenutih metoda.

. *[(b)Metoda sekanti:* $x_0 = 2, x_1 = 1.5,$ $x_2 = 1.16667$, $x_3 = 1.03846$ *]*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima).

Elektrotehnički fakultet, Sveučilište u Osijeku **B**
17. studenog, 2009.

2. kontrolna zadaća iz Numeričke matematike
Ak. god. 2009./2010.

Zadatak 1 [20 bodova] *Zadan je sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -0.2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

(a) Kako se definira broj uvjetovanosti $\operatorname{cond}(A)$ kvadratne matrice A? Odredite broj uvjetovanosti zadane matrice A.

(b) Kako će se promijeniti rješenje x sustava, ako se matrica A promijeni za ΔA, a vektor slobodnih koeficijenata b ostane nepromijenjen?

. *[(a)* $\operatorname{cond} A = \|A\|\|A^{-1}\| = 25, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 10/3 & 5/3 \end{bmatrix}$ *]*

Zadatak 2 [20 bodova] *Primjenom QR-dekompozicije riješi sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, ako je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 10 \\ 2 & 8 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} -5 & 2 & 14 \\ -10 & -11 & -2 \\ -10 & 10 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = Q \cdot R, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

. *[*$z^* = (-3, -7, 1)^T$, $x^* = (3, -1, 0.2)^T$*]*

Zadatak 3 [20 bodova]

(a) Napišite u matričnom obliku Jacobijevu i Gauss–Seidelovu iterativnu metodu za rješavanje sustava $Ax = b$.

(b) Zadan je sustav $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Počevši s početnom iteracijom $x^{(0)} = (0, 0)^T$ izračunajte sljedeće dvije iteracije primjenom Jacobijeve i Gauss–Seidelove iterativne metode. Hoće li ovi procesi konvergirati? Zašto?

.*[(a) J:* $x^{(k+1)} = -(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$, *GS:*$x^{(k+1)} = -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + D^{-1}b$, $D = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$,
(b) J: $x^1 = (-0.5, 0.5)^T$, $x^2 = (-0.75, 0.25)^T$; *GS:* $x^1 = (-0.5, 0.25)^T$, $x^2 = (-0.625, 0.1875)^T$ *]*

Zadatak 4 [20 bodova]

(a) Jednadžbu $x^2 - 2x - 1 = 0$, $x \in [1, 3]$ napiši u obliku pogodnom za rješavanje metodom jednostavnih iteracija. Odredite broj q.

(b) Za $x_0 = 1$, izračunajte sljedeće dvije iteracije.

. *[(a)* $x = \sqrt{2x+1}$, $q = \frac{\sqrt{3}}{3}$, *(b)* $x_1 = 1.73205$, $x_2 = 2.11284$ *]*

Zadatak 5 [20 bodova]

(a) Pod kojim uvjetima na funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Newtonova metoda tangenti konvergira prema jedinstvenoj nultočki $\xi \in [a, b]$?

(b) Izaberite interval $[a, b]$ i početnu aproksimaciju $x_0 \in [a, b]$ tako da Newtonova metoda tangenti za funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 1$ konvergira i izračunajte sljedeće dvije iteracije.

. *[(b)* $x_0 = 3 \in [2, 3]$, $x_1 = 2.5$, $x_2 = 2.41667$ *]*

Zadatak 6 [20 bodova]

(a) Koje modifikacije Newtonove metode tangenti poznajete ?

(b) Za funkciju iz prethodnog primjera izračunajte nekoliko iteracija jednom od spomenutih metoda.

. *[(b)Metoda sekanti:* $x_0 = 2, x_1 = 1.5,$ $\quad x_2 = 1.16667,\ x_3 = 1.03846$ *]*

Napomena: Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim kolokvijima).