

**Pismeni ispit iz Numeričke matematike**

**Zadatak 1.** [20 bodova]

(a) *S kojom točnošću moramo znati vrijednosti nezavisnih varijabli*

$$x^* = 2.3456, \quad y^* = 6.2277, \quad z^* = -2.8162,$$

*da apsolutna pogreška funkcije  $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x+2y}}{x+2z}$  ne premaši  $\Delta f^* = 0.005$ ?*

(b) *Za koliko znamenki u varijabli  $y$  možemo reći da je signifikantno?*

**Zadatak 2.** [20 bodova]

*Neka su  $y_0, y_1, y_2$  poznate vrijednosti funkcije  $f$  u čvorovima  $x_0 = -4, x_1 = 3, x_2 = 5$ .*

(a) *Njezin linearni interpolacijski spline može se zapisati u obliku*

$$L(x) = y_0 C_0(x) + y_1 C_1(x) + y_2 C_2(x),$$

*gdje su  $C_0, C_1, C_2$  odgovarajuće hat funkcije. Napišite izraze za hat funkcije  $C_1$  i  $C_2$  i skicirajte ih.*

(b) *S obzirom na zadane točke napišite sustav uvjeta na osnovi kojih je moguće odrediti prirodni kubični interpolacijski spline.*

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) *Napišite u matričnom obliku Jacobijevu i Gauss–Seidelovu iterativnu metodu za rješavanje sustava  $Ax = b$ .*

(b) *Zadan je sustav  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ . Počevši s početnom iteracijom  $x^{(0)} = (0, 0)^T$  izračunajte sljedeće dvije iteracije primjenom Jacobijeve i Gauss–Seidelove iterativne metode. Hoće li ovi procesi konvergirati? Zašto?*

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) *Pokažite da su funkcije  $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x - \frac{5}{2}$  i  $\varphi_2(x) = x^2 - 5x + \frac{25}{6}$  međusobno ortogonalne na intervalu  $[0, 5]$ .*

(b) *Pronađite najbolju  $L_2$  aproksimaciju funkcije  $f(x) = |x - 3|$  na intervalu  $[0, 5]$  na potprostoru određenom baznim funkcijama  $\varphi_0(x), \varphi_1(x)$  i  $\varphi_2(x)$ .*

**Zadatak 5.** [20 bodova]

(a) *Na koliko dijelova treba podijeliti interval  $[2, 4]$ , tako da primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila dobijemo približnu vrijednost integrala  $\int_2^4 \frac{(x+6)^3}{x} dx$  s točnošću  $\epsilon = 0.05$ ?*

(b) *Primjenom generaliziranog Simpsonovog pravila izračunajte približnu vrijednost integrala  $\int_2^4 \frac{(x+6)^3}{x} dx$  s točnošću  $\epsilon = 0.05$ .*