

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) S kojom točnošću moramo znati vrijednosti nezavisnih varijabli

$$x^* = 10.0002, \quad y^* = 11.2003, \quad z^* = 14.0162,$$

da apsolutna pogreška funkcije $f(x, y, z) = \frac{\sin(x+y)\cos(x-y) + \sin(x-y)\cos(x+y)}{z}$ ne premaši $\Delta f^* = 0.0005$?

(b) Što smo morali pretpostaviti da bismo mogli izračunati tražene točnosti?

(c) Za koliko znamenki u varijabli z možemo reći da je signifikantno?

Zadatak 2. [20 bodova]

Izračunajte kubični interpolacijski spline koji interpolira funkciju $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x + 1)$ u točkama $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Zadana je QR-dekompozicija matrice A . Pomoću nje riješite sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = Q \cdot R = \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} & 7\sqrt{2} & -5 \\ -4\sqrt{3} & -\sqrt{2} & -10 \\ 5\sqrt{3} & -5\sqrt{2} & -5 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 50\sqrt{3} & 12\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 0 & 3\sqrt{2} & -31\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 35 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -11 \\ 7 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

(b) Izračunajte uvjetovanost matrice A ako je

$$R^{-1} = \frac{1}{35\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 7\sqrt{3} & -42\sqrt{2} & -75 \\ 0 & 175\sqrt{2} & 310 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Jesu li funkcije $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = (x - 1)^3$ i $\varphi_3(x) = |x - 1| - \frac{1}{2}$ međusobno ortogonalne na intervalu $[0, 2]$?

(b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x^2 - 1|$ na intervalu $[0, 2]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$.

Zadatak 5. [20 bodova]

a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[1, 3]$ da bi se s točnošću $\epsilon = 0.005$ odredila aproksimacija integrala $\int_1^3 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ uz primjenu generaliziranog trapeznog pravila?

b) Generaliziranim trapeznim pravilom izračunajte vrijednost integrala pod a) s točnošću $\epsilon = 0.005$.