

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) S kojom točnošću moramo znati vrijednosti nezavisnih varijabli

$$x^* = 10.0002, \quad y^* = 11.2003, \quad z^* = 14.0162,$$

da apsolutna pogreška funkcije $f(x, y, z) = \frac{\text{sh}(x-y)}{\text{ch}(y-z)}$ ne premaši $\Delta f^* = 0.0005$?

(b) Što smo morali pretpostaviti da bismo mogli izračunati tražene točnosti?

(c) Za koliko znamenki u varijabli y možemo reći da je signifikantno?

Zadatak 2. [20 bodova]

Izračunajte kubični interpolacijski spline koji interpolira funkciju $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 1$ u točkama $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3$.

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) Primjenom LU-dekompozicije riješite sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -10 \end{bmatrix}.$$

(b) Ocijenite kako će se promijeniti rješenje sustava ako umjesto vektora b u sustav uvedemo novi vektor slobodnih koeficijenata $\tilde{b} = (-4, -5, -10.5)^T$?

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Jesu li funkcije $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = x - \pi/2$ i $\varphi_3(x) = |x - \pi/2|$ međusobno ortogonalne na intervalu $[0, \pi]$?

(b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[0, \pi]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$.

Zadatak 5. [20 bodova]

a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[0, 2]$ da bi se s točnošću $\epsilon = 0.05$ odredila aproksimacija integrala $\int_0^2 e^{-(1-x)^2} dx$ uz primjenu generaliziranog trapeznog pravila?

b) Generaliziranim trapeznim pravilom izračunajte vrijednost integrala pod a) s točnošću $\epsilon = 0.05$.