

Pismeni ispit iz Numeričke matematike

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) S kojom točnošću moramo znati vrijednosti nezavisnih varijabli

$$x^* = 15.4812, \quad y^* = 4.2003, \quad z^* = -43.0162,$$

da apsolutna pogreška funkcije $f(x, y, z) = \frac{\ln(x-y) - \ln((y-x)^2)}{z}$ ne premaši $\Delta f^* = 0.0005$?

(b) Što smo morali pretpostaviti da bismo mogli izračunati tražene točnosti?

(c) Za koliko znamenki u varijabli z možemo reći da je signifikantno?

Zadatak 2. [20 bodova] Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija čije vrijednosti su poznate na diskretnom skupu točaka $x_0 < x_1 < \dots < x_{2m}$ i iznose $y_0 = y_2 = \dots = y_{2m} = 1, y_1 = y_3 = \dots = y_{2m-1} = 0$. Napišite njezin interpolacijski polinom. Je li on jedinstven? Obrazložite.

Zadatak 3. [20 bodova] Zadan je sustav linearnih jednadžbi $Ax = b$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{bmatrix}.$$

(a) Odredite broj uvjetovanosti zadane matrice A .

(b) Ocijenite kako će se promijeniti rješenje sustava ako umjesto vektora b u sustav uvedemo novi vektor slobodnih koeficijenata $\tilde{b} = (2, 8, 10.5)^T$?

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) Jesu li funkcije $\varphi_1(x) = 1, \varphi_2(x) = x$ i $\varphi_3(x) = |x|$ međusobno ortogonalne na intervalu $[-2, 2]$?

(b) Pronađite najbolju L_2 aproksimaciju funkcije $f(x) = |x^3| + 2$ na intervalu $[-2, 2]$ na potprostoru određenom baznim funkcijama $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ i $\varphi_3(x)$.

Zadatak 5. [20 bodova]

a) Na koliko dijelova treba podijeliti interval $[2, 5]$ da bi se s točnošću na tri decimale odredila aproksimacija integrala $\int_2^5 \ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^8 dx$ uz primjenu generalizirane Simpsonove formule?

b) Generaliziranom Simpsonovom metodom izračunajte vrijednost integrala pod a) s točnošću na tri decimale.