

# Metoda konačnih diferencija za obične diferencijalne jednačbe

## 1 Uvod

Promatramo Chyjev problem<sup>1</sup> (vid primjerice [1], [3], [6])

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \alpha, \quad y'(a) = \beta \end{aligned} \quad (1)$$

Jednostavnom supstitucijom  $y_1 := y$   $y_2 := y'$  problem (1) prelazi u novi Chyjev problem

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, & y_1(a) &= \alpha \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2), & y_2(a) &= \beta \end{aligned}$$

koji se lakše rješava.

Drugi problem koji se često promatra u literaturi (vidi [1], [3], [6]) je tzv. rubni problem<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta \end{aligned} \quad (2)$$

**Primjer 1** *Potražimo rješenje rubnog problema*

$$\begin{aligned} y'' &= -y, \\ y(0) &= 3, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

*Opće rješenje gornje diferencijalne jednačbe je funkcija  $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ . Uvrštavanjem rubnih uvjeta dobivamo:  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = 7$ . Rješenje rubnog problema je dakle funkcija  $y(x) = 3 \cos x + 7 \sin x$ .*

**Zadatak 1** *Korištenjem programskog sustava Mathematica nacrtajte graf funkcije rješenja iz prethodnog primjera i točke  $T_0(0, 3)$  i  $T_1(\frac{\pi}{2}, 7)$ .*

**Zadatak 2** *Pokažite da sljedeći rubni problem nema rješenja*

$$\begin{aligned} y'' &= -y, \\ y(0) &= 3, \quad y(\pi) = 7. \end{aligned}$$

Jedna klasa metoda za rješavanje rubnog problema (2) su iterativne metode (tzv. shootins methods) koje koriste poznato rješenje problema (1) uz povoljno odabranu vrijednost  $y'(a)$  i neku metodu za rješavanje nelinearne jednačbe.

**Zadatak 3** *Izradite Mathematica-program za implementaciju Shootings metode za rješavanje rubnih problema za obične diferencijalne jednačbe i testirajte ga na nekoliko primjera. Literatura: [1], [3], [6])*

Druga klasa metoda za rješavanje problema (2) su tzv. metode konačnih diferencija (ili metode diskretizacije) (vidi primjerice [1], [3], [4]).

<sup>1</sup>en: Initial Value Problem, de: Anfangswertproblem

<sup>2</sup>en: Two-Point Boundary-Value Problem, de: Randwertproblem

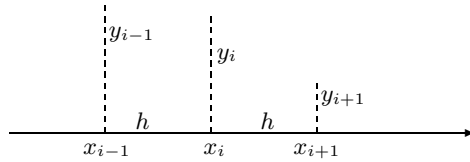
## 2 Metoda konačnih diferencija

Promatramo rubni problem (2)

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y'), \\ y(a) &= \alpha, \quad y(b) = \beta \end{aligned}$$

Načinimo subdiviziju intervala  $[a, b]$   $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ , gdje je  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n+1}$ . Prvu derivaciju funkcije  $y$  u točki  $x_i$  možemo definirati na sljedeće načine (vidi primjerice [4] i *Sliku 1*)

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{h} (y_{i+1} - y_i) && \text{– desna razlika} \\ \nabla y_i &= \frac{1}{h} (y_i - y_{i-1}) && \text{– lijeva razlika} \\ \delta y_i &= \frac{1}{2} (\Delta y_i + \nabla y_i) = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}) && \text{– centralna razlika} \end{aligned}$$



Slika 1. Definiranje kvocijenta diferencija

**Zadatak 4** Provjerite da vrijedi  $\Delta y_i = \nabla y_{i+1}$ .

Drugu derivaciju funkcije  $y$  u točki  $x_i$  možemo definirati na sljedeće načine (vidi *Sliku 1*)

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta\left(\frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i)\right) = \frac{1}{h}(\Delta y_{i+1} - \Delta y_i) = \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{h}(y_{i+2} - y_{i+1}) - \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) \right] = \frac{1}{h^2}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) \\ \Delta(\nabla y_i) &= \Delta\left(\frac{1}{h}(y_i - y_{i-1})\right) = \frac{1}{h}(\Delta y_i - \Delta y_{i-1}) = \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{h}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{h}(y_i - y_{i-1}) \right] = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}). \end{aligned}$$

Sada rubni problem (2) možemo napisati u diskretiziranom obliku kao sustav (općenito nelinearnih) jednadžbi

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})\right), \quad i = 1, \dots, n \\ y_0 &= \alpha, \quad y_{n+1} = \beta \end{aligned} \quad (3)$$

ili u matričnom obliku

$$\mathbf{A} \mathbf{y} = h^2 \mathbf{F}(\mathbf{y}) - \mathbf{r}, \quad (4)$$

gdje je:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ \beta \end{bmatrix},$$

$$f_i = f\left(x_i, y_i, \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1})\right).$$

## 2.1 Slučaj linearne diferencijalne jednačbe

Pretpostavimo da je u rubnom problemu (2) funkcija  $f$  zadana s

$$f(x, y, y') = u(x) + v(x)y + w(x)y'.$$

U tom slučaju diskretizacija (3) izgleda ovako:

$$\begin{aligned} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} &= h^2 \left[ u_i + v_i y_i + \frac{w_i}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}) \right], & i = 1, \dots, n \\ y_0 &= \alpha, & y_{n+1} = \beta, \end{aligned} \quad (5)$$

gdje je  $u_i = u(x_i)$ ,  $v_i = v(x_i)$ ,  $w_i = w(x_i)$ , što se može zapisati na sljedeći način

$$c_{i-1}y_{i-1} + a_i y_i + b_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdje je

$$\begin{aligned} a_i &= 2 + h^2 v_i, & d_i &= -h^2 u_i, & i &= 1, \dots, n, \\ b_i &= -1 + \frac{1}{2} h w_i, & c_{i-1} &:= -1 - \frac{1}{2} h w_i, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

ili u matricnom obliku

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \alpha c_0 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n - \beta b_n \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Matrica sustava (6) je trodijagonalna, a uz uvjet da je  $v_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  i  $h$  dovoljno malen ( $|\frac{1}{2} h w_i| < 1$ ) ona je i dijagonalno dominantna. Naime, vrijedi

$$|a_i| - |b_i| - |c_{i-1}| = 2 + h^2 v_i - \left(1 - \frac{1}{2} h w_i\right) - \left(1 + \frac{1}{2} h w_i\right) = h^2 v_i > 0.$$

**Primjer 2** *Korištenjem programskog sustava Mathematica metodom konačnih diferencija riješit ćemo rubni problem za običnu diferencijalnu jednačbu iz Primjera 1. U ovom slučaju je*

$$\begin{aligned} a &= 0, & b &= \frac{\pi}{2}, & h &= \frac{b-1}{n+1}, & y_0 &= 3, & y_{n+1} &= 7, \\ u(x) &= 0, & v(x) &= -1, & w(x) &= 0, \end{aligned}$$

a sustav (6) postaje

$$\begin{bmatrix} 2 - h^2 & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 - h^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 - h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ \vdots \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Rješavanjem ovog sustava dobit ćemo vrijednosti  $y_i$  tražene funkcije  $y$  u diskretnom skupu točaka  $x_1, \dots, x_n$ .

Za rješavanje ovog sustava koristit ćemo LU-dekompoziciju i ranije konstruiran modul `LUtri`, koji efikasno koristi specijalnu i rijetku strukturu trodijagonalne dijagonalno dominantne matrice.

Najprije ćemo učitati ulazne podatke

```
In[1]:= (* y'' = -y; y[0] = 3, y[Pi/2] = 7 *)
yy[t_] := 3Cos[t] + 7Sin[t];
A = 0; B = Pi/2; alpha = 3; beta = 7;
u[x_] := 0; v[x_] := -1; w[x_] := 0;
n = 10; h = (B - A)/(n + 1);
```

Nakon toga definirat ćemo točke  $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ , elemente matrice sustava (6) i vektor slobodnih koeficijenata

```
In[2]:= x = Table[A + i h, {i, 0, n + 1}];
a = Table[2 + h^2v[x[[i]]], {i, n}];
b = Table[-1 + .5h w[x[[i]]], {i, n}];
c = Table[-1 - .5h w[x[[i + 1]]], {i, n}];
d = Table[-h^2u[x[[i]]], {i, n}];
d[[1]] = d[[1]] + (1 + .5h w[x[[1]])alpha; d[[n]] = d[[n]] - b[[n]]beta;
```

Nakon poziva modula LUtri na jedan koordinatni sustav nacrtat ćemo graf funkcije  $y$ , točke  $T_0(a, \alpha)$  i  $T_1(b, \beta)$ , te diskretne vrijednosti  $y_1, \dots, y_n$  tražene funkcije  $y$

```
In[3]:= y = LUtri[n, a, b, c, d];
slf = Plot[yy[t], {t, A, B}, PlotRange -> {0, 8}, DisplayFunction -> Identity];
rub = ListPlot[{{A, alpha}, {B, beta}}, PlotStyle -> AbsolutePointSize[5],
DisplayFunction -> Identity];
sol = ListPlot[Table[{x[[i + 1]], y[[i]]}, {i, n}], PlotStyle -> AbsolutePointSize[3],
DisplayFunction -> Identity];
Show[slf, rub, sol, DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

**Zadatak 5** Koristeći navedeni Mathematica-program metodom konačnih diferencija riješite rubni problem

$$y'' = 2e^x - y,$$

$$y(0) = 2, \quad y(1) = e + \cos 1.$$

Zbog kontrole egzaktno rješenje možete dobiti na sljedeći način

```
In[4]:= DSolve[{y''[x] == 2Exp[x] - y[x], y[0] == 2, y[1] == E + Cos[1]}, y[x], x]
```

## Literatura

- [1] D. KINCAID, W. CHENEY, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing company, New York, 1996.
- [2] G. DAHLQUIST, A. BJÖRCK *Numerische Methoden*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1972. (postoji i engleski prijevod)
- [3] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [4] A. A. Самарский, Введение в численные методы, Наука, Москва, 1982.
- [5] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000
- [6] J. STOER, R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993