Diskretna Fourierova transformacija

1 Fourierov red

Neka je $f : [0,L] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(0) = f(L) = 0$ Riemann-integrabilna funkcija. Tada za svaki $x \in [0,L]$ možemo napisati **Fourierov red** (vidi [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11])

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{L} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{L} \right), \tag{1}$$

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\cos\frac{2k\pi y}{L}dy, \qquad b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(y)\sin\frac{2k\pi y}{L}dy, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{2}$$

Brojeve a_k, b_k nazivamo **Fourierovi koeficijenti** funkcije f. Koristeći poznate Eulerove formule (vidi [1], [4])

$$e^{iu} = \cos u + i\sin u, \qquad e^{-\imath u} = \cos u - i\sin u, \qquad i = \sqrt{-1},$$

Fourierov red (1) možemo zapisati u kompleksnom obliku

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{exp}\left(\frac{2k\pi ix}{L}\right), \qquad c_k = \frac{1}{L}\int_0^L f(y)\mathrm{exp}\left(\frac{2k\pi iy}{L}\right)dy, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{3}$$

Zadatak 1 *Izvedite formule (2) za Fourierove koeficijente a_k, b_k i pronađite vezu između koeficijenata a_k, b_k Fourierovog reda (1) i koeficijenata c_k Fourierovog reda (3).*

2 Diskretna Fourierova transformacija

Definicija 1 *Za dani niz kompleksnih brojeva $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}$ niz $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{C}$ definiran formulama*

$$d_k = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j \mathrm{exp}\left(-\frac{2kj\pi i}{n}\right), \qquad k = 0,1,\ldots,n-1, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{4}$$

nazivamo **diskretna fourierova transpfrmacija** *niza $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ i kraće pišemo*

$$\mathcal{F}[f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}] := [d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}] \tag{5}$$

Primijetite da se (4), odnosno (5) može zapisati u matričnom obliku kao

$$\begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-\frac{2\pi i}{n}} & e^{-\frac{2\cdot 2\pi i}{n}} & \cdots & e^{-\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \\ 1 & e^{-\frac{2\cdot 2\pi i}{n}} & e^{-\frac{2\cdot 4\pi i}{n}} & \cdots & e^{-\frac{2\cdot 2(n-1)\pi i}{n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & e^{-\frac{2(n-1)\pi i}{n}} & e^{-\frac{2\cdot 2(n-1)\pi i}{n}} & \cdots & e^{-\frac{2\cdot(n-1)^2\pi i}{n}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ f_{n-1} \end{bmatrix},$$

što možemo pisati kao

$$(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})^T = \frac{1}{n} V^*(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T, \tag{6}$$

odnosno

$$\mathcal{F}[f_0, f_1, \dots, f_{n-1}] := (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})^T = \frac{1}{n} V^*(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T, \tag{7}$$

gdje je $V^* \in \mathbb{C}^{n\times n}$ kompleksno konjugirana matrica simetrične matrice

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ . & . & . & . & . \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}, \qquad \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}. \tag{8}$$

Zadatak 2 *Pokažite da su stupci (odnosno retci) matrice V ortogonalni i da vrijedi*

$$V^*V = VV^* = nI, \tag{9}$$

$$\|Vu\|^2 = n\|u\|^2 \tag{10}$$

3 Diskretna inverzna Fourierova transformacija

Koristeći (6) i (10) lako dobivamo

$$(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T = V(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})^T, \tag{11}$$

odnosno

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \exp\left(\frac{2kj\pi i}{n}\right), \qquad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{12}$$

što u skladu s oznakom (5) možemo zapisati

$$\mathcal{F}^{-1}[d_0, d_1, \dots, d_{n-1}] := [f_0, f_1, \dots, f_{n-1}]. \tag{13}$$

Zadatak 3 *Pokažite da vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n-1} |d_k|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f_k|^2$$

Pretpostavimo sada da je $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(0) = f(L) = 0$ Riemann-integrabilna dovoljno glatka funkcija perioda L i da su poznate njene vrijednosti na jednoliko raspoređenim čvorovima u intervalu $[0, L]$:

$$f_j = f(x_j), \qquad x_j = h\,j, \qquad h = \frac{L}{n}, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1. \tag{14}$$

Sljedeći teorem pokazuje kako se primjenom diskretne inverzne Fourierove transformacije $\mathcal{F}^{-1}$ mogu dobiti aproksimacije funkcijskih vrijednosti $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ korištenjem samo prvih nekoliko Fourierovih koeficijenata funkcije f i kolika se pogreška pri tome čini. (Jednostavan dokaz može se vidjeti u [5], str. 140.)

Teorem 1 *Neka je $f \in \mathbb{C}^2[0, L]$, $\quad f(0) = f(L) = 0$ i neka su čvorovi $x_0, \ldots, x_{n-1} \in [0, L]$ definirani kao u (14). Tada vrijedi*

$$\mathcal{F}^{-1}[c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}] = [f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})] + [\delta_0, \ldots, \delta_{n-1}], \tag{15}$$

$$\text{pri čemu vrijedi} \quad \left(\sum_{k=0}^{n-1} |\delta_k|^2 \right)^{1/2} = \mathcal{O}\left(h^{3/2}\right).$$

Treba primijetiti da ovdje važnu ulogu ima pretpostavka o glatkosti funkcije f, jer se zna da tek više frekvencije u Fourierovom redu dobro aproksimiraju "špiceve" na grafu funkcije f.

Budući da se u rekonstrukciji funkcije f koristi samo dio Fourierovih koeficijenata, sve se može promatrati i kao problem kompresije podataka.

4 Trigonometrijska interpolacija

Teorem 2 *Za jednoliko raspoređene čvorove $x_j = j\frac{L}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ na intervalu $[0, L]$ i odgovarajuće funkcijske vrijednosti $f_j = f(x_j) \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, trigonometrijski polinom*

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \exp\left(\frac{2k\pi i x}{L}\right), \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

ispunjava interpolacijski zahtjev

$$p(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

onda i samo onda ako je $\mathcal{F}[f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}] = [d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}]$.

Dokaz je lako vidljiv ako primijetimo da interpolacijski zahtjev (17) za $x_j = j\frac{L}{n}$

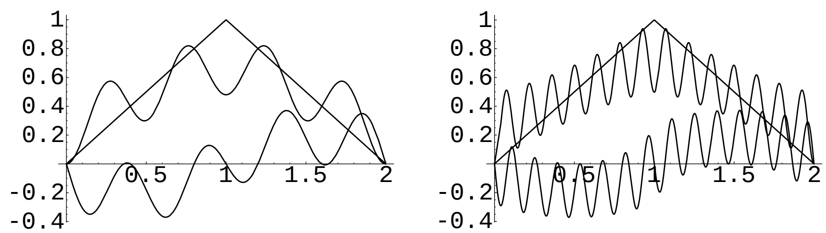
$$p(x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \exp\left(\frac{2k\pi i x_j}{L}\right) = \left[\sum_{k=0}^{n-1} d_k \exp\left(\frac{2kj\pi i}{n}\right)\right] = f_j,$$

odgovara (12), odnosno (13): $\mathcal{F}^{-1}[d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}] := [f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}]$.

Međutim poznato je da interpolacijski polinom (16) sa svojstvom (17) ima jake oscilacije (vidi [8]).

Primjer 1 *Zadana je funkcija $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\quad f(x) = 1 - |x - 1|$. Očigledno je $f(0) = f(2) = 0$.*

Primjenom *Mathematica*–programa `DFT` za $n = 5$ i $n = 15$ dobivamo odgovarajuće trigonometrijske polinome. Grafovi funkcija $Re(p(x))$ i $Im(p(x))$, zajedno s grafom funkcije f prikazani na Slici 1.



Slika 1. Trigonometrijski interpolacijski polinom za $n = 5$ i $n = 15$

U cilju postizanja dobre aproksimacije funkcije i izbjegavanja jakih oscilacija, promatramo trigonometrijsku funkciju oblika

$$r(x) = \sum_{k=-n/2}^{n/2-1} d_k \exp \frac{2k\pi i x}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

pri čemu pretpostavljamo da je $n \in \mathbb{N}$ paran broj. Pokazat će se (vidi Teorem 4) da pogreška aproksimacije funkcijom r može biti znatno manja nego pogreška aproksimacije trigonometrijskim polinomom p.

U prethodnoj sumi (18) ima n članova. Prenumerirajmo zato sumu u (18), tako da uvedemo novi indeks sumacije $j = k + \frac{n}{2}$ kome će donja granica sume biti 0, a gornja $n-1$. Dobivamo

$$r(x) = \sum_{j=0}^{n-1} d_{j-\frac{n}{2}} \exp \frac{2\left(j - \frac{n}{2}\right)\pi i x}{L} = \exp \frac{-n\pi i x}{L} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} d_{j-\frac{n}{2}} \exp \frac{2j\pi i x}{L} = p(x) \exp \frac{-n\pi i x}{L}, \tag{19}$$

a kako je $\exp \frac{-n\pi i x_j}{L} = e^{-j\pi i} = \left(e^{-\pi i}\right)^j = (-1)^j$, vrijedi

Teorem 3 *Za jednoliko raspoređene čvorove $x_j = j\frac{L}{n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ na intervalu $[0, L]$ i odgovarajuće funkcijske vrijednosti $f_j = f(x_j) \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $n \in \mathbb{N}$, trigonometrijska funlcija r zadan s (18) ispunjava interpolacijski zahtjev*

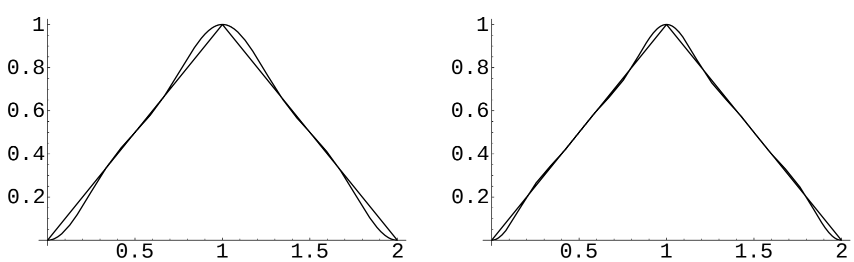
$$r(x_j) = f_j, \qquad j = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{20}$$

onda i samo onda ako je

$$\mathcal{F}\left[(-1)^0 f_0, (-1)^1 f_1, \ldots, (-1)^{n-1} f_{n-1}\right] = [d_{-\frac{n}{2}}, d_{-\frac{n}{2}+1}, \ldots, d_{\frac{n}{2}-1}]. \tag{21}$$

Ako su f_j vrijednosti dovoljno glatke periodične funkcije u čvorovima x_j, onda trigonometrijska funkcija r s interpolacijskim svojstvom $r(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$ predstavlja dobru aproksimaciju te funkcije.

Primjer 2 *Funkciju iz* Primjera 1 *aproksimirat ćemo trigonometrijskom funkcijom r za $n = 6$ i $n = 10$.*



Slika 2. Trigonometrijski interpolacijski polinom r za $n = 6$ i $n = 10$

Sljedeći teorem pokazuje veličinu pogreške prilikom aproksimacije periodične funkcije trigonometrijskom funkcijom r

Teorem 4 *Neka je $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ m puta neprekidno diferencijabilna periodična funkcija temeljnog perioda L. Tada za trigonometrijski polinom r s interpolacijskim svojstvom $r(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$ vrijedi ocjena pogreške*

$$\|r - f\|_2 \le c_m \left(\|f\|_2 + \|f^{(m)}\|_2\right) n^{-m}, \qquad c_m > 0, \tag{22}$$

pri čemu je $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^L |f(x)|^2 dx}$.

Primijetite da formula (19) pokazuje da ako trigonometrijski polinom p interpolira m puta neprekidno diferencijabilnu periodičnu funkciju $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ temeljnog perioda L na jednoliko raspoređenim čvorovima $x_j = \frac{jL}{n}$, onda je funkcija $r(x) := p(x) \exp \frac{-n\pi i x}{L}$ oblika (18) i osim toga ona interpolira funkciju $f(x) \exp \frac{-n\pi i x}{L}$ u čvorovima x_j. Pri tome je pohreška interpolacije zadana s (22).

Zadatak 4 *Pokažite da vrijedi*

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(f(x)\exp\frac{-n\pi i x}{L}\right) = \exp\frac{-n\pi i x}{L}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\left(\frac{-n\pi i}{L}\right)^k f^{(m-k)}(x)\right).$$

Iz Teorema 4 možemo dobiti i ocjenu pogreške za interpolacijski polinom p. Kako je $\left|\exp \frac{-n\pi i x}{L}\right| = 1$, vrijedi

$$\|r - f\exp\frac{-n\pi i x}{L}\| = \|p - f\| \left|\exp\frac{-n\pi i x}{L}\right| = \|p - f\|,$$

a kako u formuli iz Zadatka 4 dominira član uz n^m, vrijedi

$$\|p - f\| = \mathcal{O}(1).$$

4.1 Realna trigonometrijska interpolacija

Neka su (x_j, f_j), $j = 0, 1, \ldots, n-1$ podaci, gdje su $x_j = \frac{jL}{n} \in [0, L]$ jednoliko raspoređeni čvorovi na intervalu $[0, L]$, a $f_j \in \mathbb{R}$ realni brojevi. Tada se može pokazati da realni trigonometrijski polinom

$$T(x) = a_0 + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}\left(a_k\cos\frac{2k\pi x}{L} + b_k\sin\frac{2k\pi x}{L}\right) + a_{n/2}\cos\frac{n\pi x}{L}, \tag{23}$$

s koeficijentima

$$\begin{aligned} a_k &= \tfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j\cos\tfrac{2jk\pi}{n}, \\ b_k &= \tfrac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} f_j\sin\tfrac{2jk\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tfrac{n}{2}, \end{aligned} \tag{24}$$

interpolira podatke (x_j, f_j), $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Zadatak 5 *Pokažite da su koeficijenti a_k, b_k, $k = 0, 1, \ldots, \frac{n}{2}$ realnog trigonometrijskog interpolacijskog polinoma (23) i diskretna Fourierova transformacija $[d_{-\frac{n}{2}}, d_{-\frac{n}{2}+1}, \ldots, d_{\frac{n}{2}-1}]$ zadan s (21) povezani formulama*

$$\begin{aligned} &d_0 = a_0, && d_{-n/2} = a_{n/2}, \\ &d_k = a_k - ib_k, && d_{-k} = a_k + ib_k, \quad k = 1, \ldots, \tfrac{n}{2} - 1. \end{aligned} \tag{25}$$

Zadatak 6 *Pokažite da za trigonometrijsku funkciju r zadanu s (18) i trigonometrijski polinom T zadan s (23) vrijedi*

(i) $\mathit{Re}\, r(x) = T(x)$,

(ii) $T(x_j) = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$

5 Brza Fourierova transformacija

Diskretna Fourierova transformacija $\mathcal{F}[f_0, f_1, \dots, f_{n-1}] := (d_0, d_1, \dots, d_{n-1})^T = \frac{1}{n} V^*(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})^T$ zahtijeva $\mathcal{O}(n^2)$ kompleksnih množenja i zbog toga može trošiti puno vremena rada računala. Brza Fourierova transformacija[1] zahtijevat će samo $\mathcal{O}(n\log_2(n))$ kompleksnih množenja.

Teorem 5 *Neka su $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ i $g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-1}$ dva niza kompleksnih brojeva duljine m. Tada je diskretna Fourierova transformacija naizmjeničnog niza $g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}$ duljine $2m$ zadana s*

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}] &= \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_k[g_0, g_1, \dots, g_{m-1}] + \tfrac{1}{2}e^{-k\pi i/m}\mathcal{F}_k[g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-1}] \\
\mathcal{F}_{m+k}[g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}] &= \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_k[g_0, g_1, \dots, g_{m-1}] - \tfrac{1}{2}e^{-k\pi i/m}\mathcal{F}_k[g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-1}]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

gdje je $\mathcal{F}_k$, odnosno $\mathcal{F}_{m+k}$, k-ta, odnosno $(m+k)$-ta komponenta Fourierove transformacije $\mathcal{F}$.

Dokaz. Primijetimo najprije da se k-ta komponenta Fourierove transformacije $\mathcal{F}[g_0, g_1, \dots, g_{m-1}]$ dobije kao ponderirana aritmetička sredina brojeva $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$, pri čemu se ponder broj g_j definira kao $\exp \frac{2kj\pi i}{n}$. Zato će se k-ta komponenta $\mathcal{F}_k$ Fourierove transformacije $\mathcal{F}[g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}]$ dobiti kao aritmetička sredina brojeva $g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}$, pri čemu se ponderi neparnih članova $g_0, g_1, \dots, g_{m-1}$ definiraju s $\exp \frac{-2k(2j)\pi i}{2m}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, a ponderi koji stoje uz parne članove $g_m, g_{m+1}, \dots, g_{2m-1}$ s $\exp \frac{-2k(2j+1)\pi i}{2m}$, $j = 0, 1, \dots, m-1$. Zato za $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_k[g_0, g_m, g_1, g_{m+1} \dots, g_{m-1}, g_{2m-1}] &= \frac{1}{2m}\left(\sum_{j=0}^{m-1} g_j \exp\frac{-2k(2j)\pi i}{2m} + \sum_{j=0}^{m-1} g_{m+j} \exp\frac{-2k(2j+1)\pi i}{2m}\right) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\sum_{j=0}^{m-1} g_j \exp\frac{-2kj\pi i}{m} + \exp\frac{-k\pi i}{m}\sum_{j=0}^{m-1} g_{m+j} \exp\frac{-2kj\pi i}{m}\right),
\end{aligned}
$$

što je prva jednakost u (26). Druga jednakost dobiva se analogno, pri čemu zamjenjujemo $k \leftrightarrow k+m$ i korististimo

$$
e^{2(k+m)j\pi i/2m} = e^{-j\pi i}e^{-kj\pi i/m} = (-1)^j e^{-kj\pi i/m}.
$$

♣

Primjer 3 *Ako je $m = 2^q$, $q \in \mathbb{N}$, onda se za izračunavanje Fourierove transformacije brojeva $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$ može efikasno iskoristiti prethodni* Teorem 5.

Neka je $q = 3$, odnosno $m = 2^3 = 8$. Da bismo izračunali Fourierovu transformaciju niza kompleksnih brojeva

$$
f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7,
$$

u smislu Teorema 5, prije toga potrebno je izračunati Fourierove transformacije

$$
\mathcal{F}[f_0, f_2, f_4, f_6], \qquad \mathcal{F}[f_1, f_3, f_5, f_7],
$$

[1] en: Fast Fourier Transform (FFT)

a za njih prije toga treba izračunati

$$\mathcal{F}[f_0, f_4], \qquad \mathcal{F}[f_2, f_6], \qquad \mathcal{F}[f_1, f_5], \qquad \mathcal{F}[f_3, f_7],$$

a za njih prije toga treba izračunati

$$\mathcal{F}[f_0], \qquad \mathcal{F}[f_4], \qquad \mathcal{F}[f_2], \qquad \mathcal{F}f_6], \qquad \mathcal{F}[f_1], \qquad \mathcal{F}[f_5], \qquad \mathcal{F}[f_3], \qquad \mathcal{F}[f_7],$$

što su u stvari sami brojevi

$$f_0, \qquad f_1, \qquad f_2, \qquad f_3, \qquad f_4, \qquad f_5, \qquad f_6, \qquad f_7.$$

5.1 Pomoćni materijal

Definicija 2 *Za dani* $q \in \mathbb{N}_0$[2] *neka je* $k = \sum_{j=0}^{q-1} b_j 2^j$ *jedinstvena binarna reprezentacija broja* $k \in \mathcal{M}_q = \{0, 1, \ldots, 2^q - 1\}$ *s binarnim znamenkama* (bitovima) $b_j \in \{0, 1\}$. *Tada funkciju definiranu s*

$$\sigma_q : \mathcal{M}_q \longrightarrow \mathcal{M}_q, \qquad \sigma_q\left(\sum_{j=0}^{q-1} b_j 2^j\right) = \sum_{j=0}^{q-1} b_{q-1-j} 2^j,$$

nazivamo **bit reverse**. *Specijalno se uzima* $\mathcal{M}_0 = \{0\}$ *i* $\sigma_0(0) = 0$.

Uz supstituciju $l = q - 1 - j$ možemo pisati:

$$\sigma_q\left(\sum_{j=0}^{q-1} b_j 2^j\right) = \sum_{j=0}^{q-1} b_{q-1-j} 2^j = \sum_{l=q-1}^{0} b_l 2^{q-1-l} = \sum_{l=0}^{q-1} b_l 2^{q-1-l},$$

pa uz zamjenu $l \leftrightarrow j$ funkciju σ_q možemo zapisati i u obliku

$$\sigma_q\left(\sum_{j=0}^{q-1} b_j 2^j\right) = \sum_{j=0}^{q-1} b_j 2^{q-1-j}.$$

Sljedeći teorem pokazuje kako se efikasno mogu računati vrijednosti $\sigma_q(0), \sigma_q(1), \ldots, \sigma_q(2^q - 1)$.

Teorem 6 *Vrijednosti funkcije bit reverse* $\sigma_q : \mathcal{M}_q \longrightarrow \mathcal{M}_q$ *dobivaju se na sljedeći način:*

$$\sigma_q(2^r + k) = \sigma_q(k) + 2^{q-1-r}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2^r - 1, \quad r = 0, 1, \ldots, q - 1.$$

Dokaz. Neka je $r \in \{0, 1, \ldots, q - 1\}$. Za $k \in \{0, 1, \ldots, 2^r - 1\}$ postoji jedinstveni binarni broj

$$k = \sum_{j=0}^{r-1} b_j 2^j \quad \text{i broj} \quad k + 2^r = \sum_{j=0}^{r-1} b_j 2^j + 2^r.$$

Prema definiciji funkcije σ_q imamo

$$\begin{aligned} \sigma_q(k + 2^r) &= \sigma_q\left(\sum_{j=0}^{r-1} b_j 2^j + 2^r\right) \overset{b_r=1}{=} \sigma_q\left(\sum_{j=0}^{r} b_j 2^j\right) = \sum_{j=0}^{r} b_j 2^{q-1-j} = \sum_{j=0}^{r-1} b_j 2^{q-1-j} + 1 \cdot 2^{q-1-r} \\ &= \sigma_q(k) + 2^{q-1-r}. \end{aligned}$$

♣

[2] $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Zadatak 7 *Pokažite da je funkcija bit reverse* $\sigma_q : \mathcal{M}_q \longrightarrow \mathcal{M}_q$ *bijekcija i da vrijedi* $\sigma_q^{-1} = \sigma_q$. *Također pokažite da vrijedi:*

$$\begin{array}{lrcll} (i) & \sigma_r(k) & = & \sigma_{r+1}(2k), & k \in \mathcal{M}_r \\ (ii) & 2^r + \sigma_r(k) & = & \sigma_{r+1}(2k+1), & k \in \mathcal{M}_r. \end{array}$$

Seminar 1 (Fast Fourier Transform) *Primjenom* Teorema 5 *za proizvoljno zadane kompleksne brojeve* $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1} \in \mathbb{C}$, $n = 2^q$, $q \in \mathbb{N}$ *odredite diskretnu Fourierovu transformaciju* $\mathcal{F}[f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}]$ *(također posebno vidi [5], [7], [9], [10]).*

Literatura

[1] D. Butković, *Kompleksni konačnodimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004.

[2] I. Ivanšić, *Fourierovi redovi. Diferencijalne jednadžbe*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2002.

[3] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1977.

[5] R. Plato, *Concise Numerical Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, 2003.

[6] R. Plato, *Numerische Mathematk kompakte*, Vieweg Verlag, München, 1962. `http://www.ams.org/bookpages/gsm-57`

[7] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[8] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[9] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1*, 8. Auflage, Springer–Verlag, Berlin, 2002.

[10] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[11] S. Suljagić, *Matematika III*, internet-udžbenik, `http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat3/`