Uvjetovanost sustava linearnih jednadžbi

1 Uvod

Promatramo sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Uz pretpostavku da je $\mathbf{A}$ kvadratna regularna matrica, sustav ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Mogu se postaviti ovakva pitanja:

(i) *Koliko će se promijeniti rješenje* $\mathbf{x}$ *sustava, ako se vektor slobodnih koeficijenata* $\mathbf{b}$ *promijeni za* $\Delta\mathbf{b}$*, a matrica* $\mathbf{A}$ *ostane nepromijenjena?*

(ii) *Koliko će se promijeniti rješenje* $\mathbf{x}$ *sustava, ako se matrica sustava* $\mathbf{A}$ *promijeni za* $\Delta\mathbf{A}$*, a vektor* $\mathbf{b}$ *ostane nepromijenjen?*

(iii) *Koliko će se promijeniti rješenje* $\mathbf{x}$ *sustava ako se matrica sustava* $\mathbf{A}$ *promijeni za* $\Delta\mathbf{A}$*, a vektor* $\mathbf{b}$ *za* $\Delta\mathbf{b}$*?*

U odgovoru na sva tri pitanja pojavljuje se broj uvjetovanosti matrice $\mathbf{A}$ (vidi primjerice [4], [], [])

$$\mathrm{cond}\,(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}^{-1}\|\|\mathbf{A}\|,$$

gdje je $\|\cdot\|$ neka matrična norma. Broj uvjetovanosti matrice $\mathbf{A}$ uvijek je veći ili jednak 1. Ako je matrica dobro uvjetovana ($\mathrm{cond}\,(\mathbf{A})$ je blizu 1), pogreške u vektoru rješenja $\mathbf{x}$ bit će reda veličina pogrešaka u matrici $\mathbf{A}$ ili vektoru $\mathbf{b}$. Ako je matrica loše uvjetovana ($\mathrm{cond}\,(\mathbf{A})$ je puno veći od 1), već male pogreške u elementima matrice $\mathbf{A}$ ili vektoru $\mathbf{b}$ proizvest će velike pogreške u vektoru rješenja $\mathbf{x}$.

Razloge ovim pojavama pokušat ćemo geometrijski obrazložiti na sustavu dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, a pri tome razmatrat ćemo samo slučaj pojave pogrešaka u vektoru slobodnih koeficijenata.

2 Geometrijski smisao

Geometrijski gledano sustav dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice predstavlja dva pravca u ravnini. Riješiti ovakav sustav znači pronaći sjecište spomenutih pravaca. Sustav je rješiv i ima jedinstveno rješenje ako se pravci sjeku u jednoj točki, ima beskonačno rješenja ako pravci leže jedan na drugome, a sustav nema rješenja ako se pravci ne sijeku (ako su paralelni!)

Razmotrimo najprije primjer sustav linearnih jednadžbi, gdje se odgovarajući pravci sijeku skoro pod pravim kutem:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 &= -2 \end{aligned} \tag{1}$$

Rješenje ovog sustava je vektor $x^* = (0, 1)^T$, a grafički je prkazan na *Slici 1.a.* Ovu sliku i odgovarajući ispis dobivamo tako tako da najprije pozovemo *Mathematica–package* `Graphics‘ImplicitPlot‘`

```
In[1]:=<< Graphics‘ImplicitPlot‘

In[2]:= n = 2; a = {{2., -1}, {-1, -2}}; b = {-1, -2};
        x = LinearSolve[a, b];
        Print["A =",MatrixForm[a],"  b =", MatrixForm[b],"  x =",MatrixForm[x],"  cond[A] = ",cond[a, n]]
        sl0 = ImplicitPlot[{a[[1,1]]u + a[[1,2]]v == b[[1]], a[[2,1]]u + a[[2,2]]v == b[[2]]}, {u,-2,2},
                        PlotRange -> {-2, 4}];
```

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad cond[A] = 1.8$$

Pri tome, broj uvjetovanosti matrica $\mathbf{A}$ računali smo modulom `cond`:

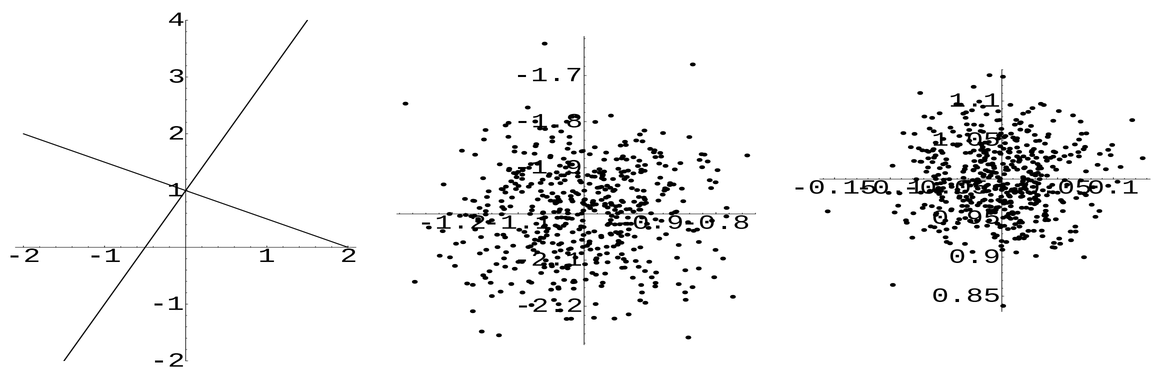
```
cond[a_, n_] := Module[{na, a1,na1},
                        na = Max[Table[Sum[Abs[a[[i, j]]], {j, n}], {i, n}]];
                        a1 = Inverse[a];
                        na1 = Max[Table[Sum[Abs[a1[[i, j]]], {j, n}], {i, n}]];
                        na na1 // N]
```

Sada ćemo promatrati puno sustava oblika (1) pri čemu ćemo komponente vektora $\mathbf{b}$ kontaminirati normalno distribuiranom slučajnom varijablom $N[0,\sigma^2]$. Svi tako dobiveni vektori $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$ prikazani su na *Slici 1.b* kao crne točkice u ravnini.

Za svaki takav vektor $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$ riješit ćemo odgovarajući sustav jednadžbi. Tako dobivamo odgovarajuća rješenja sustava $\mathbf{x}^{(\mathbf{i})}$. Svi tako dobiveni vektori prikazani su na *Slici 1.c* kao crne točkice u ravnini.

Primijetimo da je "oblak" točkica koji predstavlja različite vektore $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$ centriran oko točke $(-1,-2)$, koja predstavlja vektor slobodnih koeficijenata sustava (1), dok je "oblak" točkica koji predstavlja različite vektore $\mathbf{x}^{(\mathbf{i})}$ centriran oko točke $(0,1)$, koja predstavlja vektor rješenja sustava (1).

a) Grafički prikaz sustava b) Distribucija vektora $\mathbf{b}$ c) Distribucija vektora $\mathbf{x}$



Slika 1. Dobro uvjetovan sustav

U cilju generiranja spomenutih vektora $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$ najprije moramo pozvati *Mathematica–package* `Statistics‘Master‘`, a budući da ćemo puno puta rješavati sustava s istom matricom sustava i različitim slobodnim koeficijentima, iskoristit ćemo novu mogućnost koju pruža *Mathematica 5.0*.

```
In[3]:=<< Statistics‘Master‘

In[4]:= m = 500; var = .1;  SeedRandom[1]; podb = podx = Table[{0, 0}, {i, m}];
        f = LinearSolve[a];
        Do[b1 = {Random[NormalDistribution[b[[1]], var]], Random[NormalDistribution[b[[2]], var]]};
                 x1 = f[b1];    (* LinearSolve[a, b1]; *)
                 podb[[i]] = b1; podx[[i]] = x1,
                                                  {i, m}];
        sl1 = ListPlot[podb, PlotStyle -> {AbsolutePointSize[2]}, AspectRatio -> Automatic];
        sl2 = ListPlot[podx, PlotStyle -> {AbsolutePointSize[2]}, AspectRatio -> Automatic];
        Show[GraphicsArray[{sl0, sl1, sl2}]];
```

Primijetimo da je na *Slici 1* da veličina "oblaka" vektorâ slobodnih koeficijenata $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$ otprilike odgovara veličini "oblaka" vektorâ rješenja $\mathbf{x}^{(\mathbf{i})}$. To znači da su pogreške u vektoru rješenja $\mathbf{x}$ reda veličina pogrešaka u vektoru **b**. Posljedica je to malenog broja uvjetovanosti matrice **A**, odnosno dobre uvjetovanosti sustava linearnih jednadžbi.

Razmotrimo sada primjer sustav linearnih jednadžbi, gdje se odgovarajući pravci sijeku pod vrlo malim kutem:

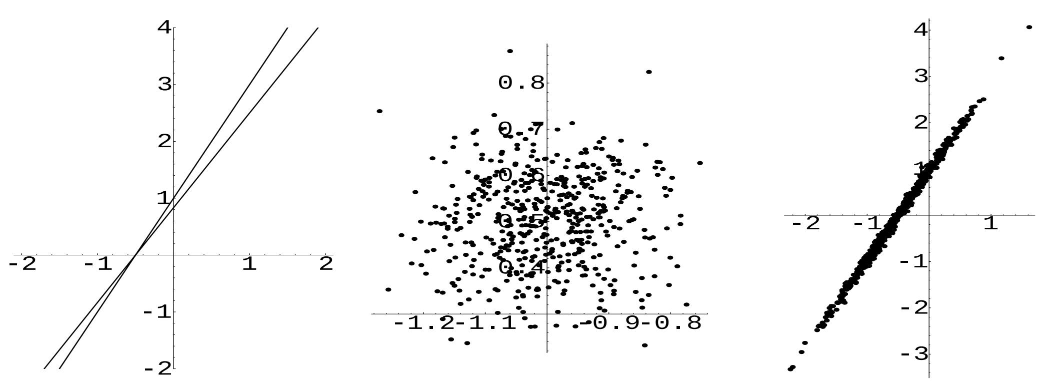
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -1 \\ -x_1 + .6x_2 &= .5 \end{aligned} \tag{2}$$

Rješenje ovog sustava je vektor $x^* = (-.5, 0)^T$, a grafički je prkazan na *Slici 2.a.*

Ponovo ćemo promatrati puno sustava oblika (2) pri čemu ćemo komponente vektora **b** kontaminirati kao i u prethodnom primjeru sličnom normalno distribuiranom slučajnom varijablom. Svi tako dobiveni vektori $\mathbf{b}^{(\mathbf{i})}$, prikazani na *Slici 2.b* kao crne točkice u ravnini, čine "oblak" gotovo iste veličine kao u prethodnom primjeru.

U ovom slučaju (kao što možemo primijetiti na *Slici 2.c*) "oblak" točkica koji predstavlja različite vektore $\mathbf{x}^{(\mathbf{i})}$ predstavljen je vrlo izduženim elipsastim oblikom c centrom u točki $(-.5, 0)$, koja predstavlja vektor rješenja sustava (2). To znači da se mogu očekivati puno veće pogreške u vektoru rješenja **x**, nego što su veličine pogrešaka u vektoru **b**. Posljedica je to relativno velikog broja uvjetovanosti matrice **A** (cond$\,(\mathbf{A}) = 45$), odnosno loše uvjetovanosti sustava linearnih jednadžbi (2).

a) Grafički prikaz sustava b) Distribucija vektora **b** c) Distribucija vektora **x**



Slika 2. Loše uvjetovan sustav

Zadatak 1 *Umjesto* Slike 1.a *nacrtajte sliku gdje će se pojaviti svi pravci*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1^{(i)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

ali tako da oni koji su bliži pravcima određenim s (1) budu tamnije nacrtani, a oni koji su udaljeniji od pravaca određenih s (1) budu svjetlije nacrtani. Što predstavlja najtamniji dio slike ?

Sličan crtež izradite umjesto Slike 2.a.

Zadatak 2 *Koristeći se svojstvenim vrijednostima i svojstvenim vektorima matrica koje se pojavljuju u ovoj analizi opišite elipsaste "oblake" na* Slici 1.c *i* Slici 2.c. *Uspostaviti vezu između kuta koji zatvaraju pravci, kojima je grafički opisan sustav jednadžbi (1) i broja uvjetovanosti matrice sustava.*

Zadatak 3 *Sličnu analizu i slike izradite za slučaj tri jednadžbe s tri nepoznanice.*

Zadatak 4 *Pokušajte geometrijski interpretirati ovisnost pogreške prilikom rješavanja sustava dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice ako se pogreške mogu očekivati samo u matrici* $\mathbf{A}$ *ili ako se pogreške mogu očekivati u matrici* $\mathbf{A}$ *i u vektoru* $\mathbf{b}$

Literatura

[1] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[3] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[4] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000