Metoda potencija

1 Uvod

Problem svojstvenih vrijednosti je kompleksan numerički problem o čemu postoji brojna literatura (vidi primjerice [1], [2], [3], [6], [7]). U primjenama je posebno važno znati najveću i najmanju po modulu svojstvenu vrijednost i odgovarajuće svojstvene vektore. Primjerice, problem izbora rješava se među ostalim i tzv. analitičkim hierarhijskim procesom, pri čemu je potrebno odrediti maksimalnu svojstvenu vrijednost jedne kvadratne matrice (vidi [10]). S druge strane, preko najmanje svojstvene vrijednosti i odgovarajućeg svojstvenog vektora jedne pozitivno definitne simetrične matrice rješava se tzv. potpuni linearni problem najmanjih kvadrata s različitim primjenama (vidi [4], [9]).

2 Metoda potencija

Najprije ćemo pokazati poznatu metodu potencija (Power Method) za traženje po modulu najveće svojstvene vrijednosti i pripadnog svojstvenog vektora. Postoje različite varijante u pristupu (vidi primjerice [1], [2] ili [7]). Mi ćemo se uglavnom držati pristupa iz [2]. Za danu kvadratnu matricu $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pretpostavljamo:

- (i) postoji jedinstvena po modulu najveća svojstvena vrijednost λ_1:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|,$$

- (ii) postoji linearno nezavisni skup svojstvenih vektora $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\}$,

$$\mathbf{A}\,\mathbf{u}^{(i)} = \lambda_i\,\mathbf{u}^{(i)}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Izaberimo vektor $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$, tako da kada ga prikažemo u bazi $\{\mathbf{u}^{(1)}, \ldots, \mathbf{u}^{(n)}\}$, koeficijent koji stoji uz svojstveni vektor $\mathbf{u}^{(1)}$ bude različit od nule:

$$\mathbf{x}^{(0)} = a_1\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + a_n\mathbf{u}^{(n)}, \qquad a_1 \neq 0, \tag{2}$$

i formirajmo niz

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)}, \cdots, \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k-1)}, \cdots, \qquad \text{tj.,}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k\mathbf{x}^{(0)}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Bez smanjenja općenitosti umjesto (1) možemo pisati (koeficijente $a_1, \dots, a_n$ "uvučemo" u vektore $\{\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}\}$)

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \mathbf{u}^{(n)},$$

odakle, koristeći (3), dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{A}^k\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \mathbf{A}^k\mathbf{u}^{(n)} = (prema(1)) = \lambda_1^k\mathbf{u}^{(1)} + \cdots + \lambda_n^k\mathbf{u}^{(n)} = \\
&= \lambda_1^k\left[\mathbf{u}^{(1)} + \left(\tfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(2)} + \cdots + \left(\tfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k\mathbf{u}^{(n)}\right] = \lambda_1^k\left[u^{(1)} + \varepsilon^{(k)}\right],
\end{aligned}$$

gdje zbog $|\lambda_i| < |\lambda_1|$, $\quad \varepsilon^{(k)} \to 0$ za $k \to \infty$.

Definirajmo sada linearni funkcional $\phi : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}$, takav da je $\phi(\mathbf{u}^{(1)}) \neq 0$. Možemo primjerice uzeti $\phi(\mathbf{x}) = x_i$, gdje je x_i i-ta komponenta vektora $\mathbf{x}$. Kako je

$$\phi(\mathbf{x}^{(k)}) = \lambda_1^k\left[\phi(u^{(1)}) + \phi(\varepsilon^{(k)})\right],$$

niz definiran s

$$r_k = \frac{\phi(\mathbf{x}^{(k+1)})}{\phi(\mathbf{x}^{(k)})} = \lambda_1\left[\frac{\phi(u^{(1)}) + \phi(\varepsilon^{(k+1)})}{\phi(u^{(1)}) + \phi(\varepsilon^{(k)})}\right]$$

konvergira prema λ_1.

Kako bi izbjegli eventualne mogućnosti da niz $\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$ konvergira prema $\mathbf{0}$ ili da bude neograničen, vektore $\mathbf{x}^{(k)}$ ćemo normirati.

Algoritam: Power Method

Korak 0 Učitamo: matricu $\mathbf{A}$, vektor $\mathbf{x}^{(0)}$, maksimalni broj iteracija , funkcional ϕ i stavimo $k = 1$

Korak 1 Definiramo vektor $\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(0)}$

Korak 2 izračunamo $\lambda = \phi(\mathbf{y})/\phi(\mathbf{x}^{(0)})$ i $\mathbf{x} = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$

Korak 3 Ispišimo rezultate: k, $\quad \lambda$, $\quad x$

Korak 4 Stavimo $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}$, $\quad k = k + 1$ i ako je $k < it$, prijeđemo na Korak 1; Inače zaustavimo iterativni proces.

Primjer 1 *Pozivom* Mathemayica - *naredbe* `Eigensystem` *za matricu*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

dobivamo svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 1$ *i odgovarajuće svojstvene vektore:* $\mathbf{u}^{(1)} = (1,1,1)^T, \quad \mathbf{u}^{(2)} = (0,1,1)^T, \quad \mathbf{u}^{(3)} = (1,0,1)^T$. *Navedenim algoritmom* Power Method *izračunat ćemo najveću svojstvenu vrijednost i odgovarajući svojstveni vektor. Uz izbor* $\mathbf{x}^{(0)} = (-1,1,2)^T$*, nakon* 10 *iteracija dobivamo*

$$\lambda_1 = 6.08121, \qquad \mathbf{u}^{(1)} = (-1., -0.973988, -0.973988)^T.$$

Međutim, ako izaberemo $\mathbf{x}^{(0)} = (1,2,3)^T$*, nećemo dobiti najveću svojstvenu vrijednost. Zašto?*

Na osnovi napisanog algoritma sagradit ćemo odgovarajući *Mathematica* – modul. Kako bi izbjegli mogućnost lošeg izbora početnog vektora $\mathbf{x}^{(0)}$, njegove komponente definirat ćemo kao slučajne brojeve.

```
In[1]:= PowerMethod[a_, it_] := Module[{lam, x, x0, y, phi}, n = Length[a[[1]]];
                                       x0 = Table[Random[], {i, n}]; phi[x_] := x[[3]];
                                            Do[y = a.x0; lam = phi[y]/phi[x0];
                                                x = y/Max[Abs[y]]; x0 = x, {i, it}];
                                                  {lam, x}
                                         ]
```

3 Inverzna metoda potencija

Inverzna metoda potencija (Inverse Power Method) služi za brzo računanje po modulu najmanje svojstvene vrijednosti i pripadnog svojstvenog vektora. Može se pokazati da vrijedi (vidi primjerice [7])

Teorem 1 *Neka je* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *regularna matrica. Ako je* $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$*, tada je* $\lambda^{-1} \in \sigma(\mathbf{A}^{-1})$.

Pretpostavimo da postoji jedinstvena po modulu najmanja ne-nul svojstvena vrijednost λ_n,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0.$$

što možemo zapisati kao

$$|\lambda_1^{-1}| \leq |\lambda_2^{-1}| \leq \cdots \leq |\lambda_{n-1}^{-1}| < |\lambda_n^{-1}|.$$

Kako je λ_n^{-1} po modulu jedinstvena najveća svojstvene vrijednost matrive $\mathbf{A}^{-1}$, možemo je izračunati primjenom Power Method.

Primjer 2 *Potražimo najmanju svojstvenu vrijednost i odgovarajući svojstveni vektor matrice iz* Primjera 1.

Primjenom modula `PowerMethod` na matricu $\mathbf{A}^{-1}$ nakon 10 iteracija dobivamo:

$$\lambda_3 = 1, \qquad \mathbf{u}^{(1)} = (1., 0, 1)^T.$$

Međutim, ako bi za funkcional φ izabrali $\varphi(\mathbf{x}) = x_2$, iterativni postupak nebi konvergirao rješenju. Zašto?

Budući da je izračunavanje inveržne matrice numerički nestabilan posao, u Koraku 1 umjesto izračunavanja vektora $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{x}^{(0)}$ možemo rješavati sustav linearnih jednažbi

$$\mathbf{A}\,\mathbf{y} = \mathbf{x}^{(0)}. \tag{4}$$

Budući da susatv oblika (4) u algoritmu rješavamo u svakoj iteraciji s istom matricom sustava $\mathbf{A}$, korisno je primijeniti LU-dekompoziciju matrice $\mathbf{A}$.

Uz pretpostavku da su dostupni moduli FS za rješavanje donjeg trokutastog i BS za rješavanje gornjeg trokutastog sustava, modifikaciom modula PowerMethod sagradit ćemo modul InversePowerMethod za izračunavanje po modulu najmanje svojstvene vrijednost matrice $\mathbf{A}$ i odgovarajućeg svojstvenog vektora.

```
In[1]:= InversePowerMethod[a_, it_] := Module[{lam, x, x0, y, phi}, n = Length[a[[1]]];
                  LU[a, n];
                     x0 = Table[Random[], {i, n}]; phi[x_] := x[[3]];
                          Do[xx = FS[n, L, x0]; y = BS[n, U, xx]; lam = phi[y]/phi[x0];
                               x = y/Max[Abs[y]]; x0 = x, {i, it}];
                                   {lam, x}
                                              ]
```

Literatura

[1] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[2] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[3] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjga, Zagreb, 1985.

[4] Y. Neivergelt, *Total least squares: state-of-the-art regression in numerical analysis*, SIAM Review **36**(1994) 258–264.

[5] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[6] J. Stoer, *Numerische Mathematik 1, 2*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[8] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[9] R. SCITOVSKI, Š. Ungar, D. Jukić, *Approximating surfaces by moving total least squares method*, Applied Mathematics and Computation **93**(1998) 219-232

[10] T. L. SAATY, How to make a decision: The analytic hierarchy process, Ruropean Journal of Operational Research **48**(1990) 9-26