

LU – dekompozicija trodijagonalne matrice

1 Priprema

Treba riješiti sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$, gdje je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ trodijagonalna matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Može se pokazati (vidi primjerice BJÖRCK (1974), GOLUB (1996)) da ako je $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ regularna kvadratna matrica, kojoj su svi glavni minori različiti od nule, tada je na jedinstven način moguće načiniti rastav $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, gdje je \mathbf{L} donja trokutasta matrica, kojoj su na glavnoj dijagonali jedinice, a \mathbf{U} gornja trokutasta matrica, čiji dijagonalni elementi nisu nule (vidi također [10]).

U našem slučaju glavni minori matrice \mathbf{A} zadane u (1) su

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \cdots \quad (2)$$

Pretpostavimo da su svi glavni minori (2) različiti od nule. Matrice \mathbf{L} i \mathbf{U} tražit ćemo u obliku

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ d_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & f_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & f_3 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & e_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e_n \end{bmatrix}.$$

Usporejujući produkt

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} e_1 & f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ d_1 e_1 & e_2 + d_1 f_1 & f_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 e_2 & e_3 + d_2 f_2 & f_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{n-2} f_{n-2} & e_{n-1} + d_{n-2} f_{n-2} & f_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} f_{n-1} & e_n + d_{n-1} f_{n-1} \end{bmatrix},$$

s matricom \mathbf{A} iz (1) dobivamo sustav od $(3n - 2)$ linearne jednadžbe s $(3n - 2)$ nepoznanice koji se lako sukcesivno rješava. Dobivamo:

$$\begin{aligned} e_1 &= a_1 & f_1 &= b_1 & d_1 &= \frac{c_1}{e_1} \\ e_2 &= a_2 - d_1 f_1 & f_2 &= b_2 & d_2 &= \frac{c_2}{e_2} \\ e_3 &= a_3 - d_2 f_2 & f_3 &= b_3 & d_3 &= \frac{c_3}{e_3} \\ &\vdots & & & & \\ e_{n-1} &= a_{n-1} - d_{n-2} f_{n-2} & f_{n-1} &= b_{n-1} & d_{n-1} &= \frac{c_{n-1}}{e_{n-1}} \\ e_n &= a_n - d_{n-1} f_{n-1} & & & & \end{aligned} \quad (3)$$

Zadatak 1 Pokažite da je postupak LU-dekompozicije trodijagonalne matrice A provediv ako su svi njeni glavni minori različiti od nule. Eksplicitno izračunajte glavne minore. U niže navedenom Mathematica-modulu na što efikasniji način dodajte kontrolu mogućnosti provedbe postupka. U modulu predvidite mogućnost ispisa matrica L i U . Testirajte modul na velikim trodijagonalnim matricama kojima su elementi uniformno distribuirani cijeli brojevi na intervalu $[0, 10]$. Kontrolirajte vrijeme definiranja trodijagonalne matrice, postupka LU-dekompozicije i rješavanja odgovarajućeg sustava.

Sada umjesto sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ promatramo sustav $\mathbf{LUx} = \mathbf{y}$. Ovaj sustav sukcesivno rješavamo tako da najprije riješimo donje trokutast sustav $\mathbf{Lz} = \mathbf{y}$, a nakon toga gornje trokutast sustav $\mathbf{Ux} = \mathbf{z}$. Rješenje i jednog i drugog sustava lako se može napisati u eksplicitnom obliku:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{Lz} = \mathbf{y} : & z_1 = y_1 & \mathbf{Ux} = \mathbf{z} : \quad x_n = \frac{z_n}{e_n} \\ & z_2 = y_2 - d_1 z_1 & x_{n-1} = \frac{1}{e_{n-1}} (z_{n-1} - f_{n-1} x_n) \\ & z_3 = y_3 - d_2 z_2 & x_{n-2} = \frac{1}{e_{n-2}} (z_{n-2} - f_{n-2} x_{n-1}) \\ & \vdots & \vdots \\ & z_n = y_n - d_{n-1} z_{n-1} & x_1 = \frac{1}{e_1} (z_1 - f_1 x_2) \end{array} \quad (4)$$

2 Programiranje

Najprije ćemo zadati red n matrice \mathbf{A} , vektor glavne dijagonale $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, vektore sporednih dijagonala $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-1}$ i vektor slobodnih koeficijenata $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ primjerice kako slijedi

```
In[1]:=n=5;
a = Table[2i, {i, n}];
b = Table[i-1, {i, n-1}];
c = Table[i+1, {i, n-1}];
y = Table[i, {i, n}];
```

Matricu \mathbf{A} i vektor \mathbf{y} možemo ispisati na sljedeći način

```
In[2]:=mat = Table[0, {i, n}, {j, n}];
Do[mat[[i, i]] = a[[i]], {i, n}];
Do[mat[[i, i+1]] = b[[i]]; mat[[i+1, i]] = c[[i]], {i, n-1}];
Print["A=", MatrixForm[mat], " y=", MatrixForm[y]]
```

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nakon toga rezervirat ćemo mjesta za vektore $\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}$ i prema (3) izračunati njihove komponente

```
In[3]:= d = e = f = Table[0, {i, n}];
e[[1]] = a[[1]]; f[[1]] = b[[1]]; d[[1]] = c[[1]]/e[[1]];
Do[e[[i]] = a[[i]] - d[[i-1]] f[[i-1]];
f[[i]] = b[[i]]; d[[i]] = c[[i]]/e[[i]],
{i, 2, n-1}];
e[[n]] = a[[n]] - d[[n-1]] f[[n-1]];
```

Nakon toga rezervirat ćemo mjesta za vektore \mathbf{z} , \mathbf{x} , prema (4) izračunati njihove komponente, i ispisati rješenje

```
In[4]:= z = x = Table[0,{i,n}];
z[[1]] = y[[1]];
Do[z[[i]] = y[[i]] - d[[i-1]]z[[i-1]], {i,2,n}];
Print["z=", z//N]
x[[n]] = z[[n]]/e[[n]];
Do[x[[n-i-1]] = (z[[n-i-1]] - f[[n-i-1]] x[[n-i]])/e[[n-i-1]], {i,0,n-2}];
Print["x = ", x//N]
```

Dobivamo

$$z = \{1., 1., 2.25, 2.28571, 3.23529\}$$

$$x = \{0.5, 0.157895, 0.368421, 0.157895, 0.421053\}$$

Cijeli program možemo organizirati u obliku jednog *Mathematica*-modula, kojeg ćemo nazvati LUtri.

```
In[1]:= LUtri[n_, a_, b_, c_, y_] := Module[{d, e, f, z, x},
(* Treba unijeti red matrice n, vektore glavne a, gornje b i donje c dijagonale,
te vektor slobodnih koeficijenata y *)
d = e = f = z = x = Table[0,{i,n}];
(* Izracunavanje elemenata dekompozicije *)
e[[1]] = a[[1]]; f[[1]] = b[[1]]; d[[1]] = c[[1]]/e[[1]];
Do[
e[[i]] = a[[i]] - d[[i-1]] f[[i-1]]; f[[i]] = b[[i]]; d[[i]] = c[[i]]/e[[i]],
{i,2,n-1}];
e[[n]] = a[[n]] - d[[n-1]] f[[n-1]];
(* Rjesavanje sustava LUx = y *)
z[[1]] = y[[1]];
Do[z[[i]] = y[[i]] - d[[i-1]]z[[i-1]], {i,2,n}];
x[[n]] = z[[n]]/e[[n]];
Do[x[[n-i]] = (z[[n-i]] - f[[n-i]] x[[n-i+1]])/e[[n-i]], {i,n-1}];
x//N]
```

Nakon definiranja i ispisa podataka, pozovemo modul LUtri i ispišemo rezultate.

```
In[2]:= n=5;
a = Table[2i, {i,n}]; b = Table[i-1, {i, n-1}]; c = Table[i+1, {i,n-1}];
y = Table[i, {i,n}];
A = Table[0, {i,n}, {j,n}];
Do[ A[[i,i]] = a[[i]], {i,n}];
Do[ A[[i,i+1]] = b[[i]]; A[[i+1,i]] = c[[i]], {i, n-1}];
Print["A=", MatrixForm[A], " y=", MatrixForm[y]]
x = LUtri[n, a, b, c, y];
Print["x = ", x ]
```

Dobivamo

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x = \{0.5, 0.15789, 0.36842, 0.15789, 0.42105\}$$

Primjer 1 Definirajmo trodijagonalnu matricu reda $n = 3000$ i vektor slobodnih koeficijenata čiji su dijagonalni elementi uniformno distribuirani slučajni brojevi na $[0, 100]$:

```
In[1]:= n = 3000; SeedRandom[13];
a = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
b = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n - 1}];
c = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n - 1}];
y = Table[Random[Real, {0, 100}], {i, n}];
```

Pozivanjem modula `LUtri` dobivamo rezultat već za 0.156 sekundi. Korištenjem originalnog Mathematica programa

```
In[2]:= A = Table[0, {i, n}, {j, n}];
Do[A[[i, i]] = a[[i]], {i, n}];
Do[A[[i, i + 1]] = b[[i]]; A[[i + 1, i]] = c[[i]], {i, n - 1}];
(* Print["A=", MatrixForm[A], " y=", MatrixForm[y]] *)
x2 = Timing[LUBackSubstitution[LUdecomposition[A], y]]; x2[[1]]
```

također dobivamo traženo rješenje, ali uz vrijeme rada računala od 14.235 sekundi. Modulom `LUtri` lako možemo riješiti i puno veći trodijagonalni sustav. Originalni Mathematica program dalje ovisi o veličini memorije računala.

Zadatak 2 (LU – dekompozicija ciklične trodijagonalne matrice)

Konstruirajte LU – dekompoziciju tzv. ciklične trodijagonalne matrice (vidi primjerice [4],[11])

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

Izvedite eksplicitne formule za rješenje sustava $\mathbf{Ax}=\mathbf{y}$. Izradite odgovarajući program.

Zadatak 3 Rješavanje vrpčastih sustava primjenom LU-dekompozicije

Specijalizirajte LU-dekompoziciju za slučaj velikih vrpčastih sustava koji se javljaju prilikom rješavanja rubnih problema uz maleni korak. Konzultirajte [4], [5], [7], [8], [10], [11], [13].

Primjer 2 Rubni problem (primjerice harmonijski oscilator i problem rezonancije)

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta$$

ili specijalno:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (5)$$

može se riješiti metodom konačnih diferencija:

Interval $[a, b]$ podijelit ćemo na n jednakih dijelova, stavljajući:

$$h = \frac{b - a}{n}, \quad x_i = a + ih.$$

Prvu (y') i drugu (y'') derivaciju funkcije y u točkama $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1}$ možemo aproksimirati formulama:

$$y'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}, \quad y''(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2}.$$

Naime, primjenom Taylorove formule na funkciju y u okolini točke $a \in (a, b)$ dobivamo

$$y(x) \approx y(a) + y'(a)(x - a)$$

odnosno uz oznaku $\Delta x = x - a$,

$$y(a + \Delta x) \approx y(a) + \Delta x y'(a),$$

pri čemu Δx može biti i pozitivan i negativan. Za $\Delta x = h$, odnosno $\Delta x = -h$ dobivamo

$$y(a + h) \approx y(a) + h y'(a), \quad \text{odnosno} \quad y(a - h) \approx y(a) - h y'(a).$$

Oduzimajući ove dvije jednakosti, dobivamo

$$y'(a) \approx \frac{y(a + h) - y(a - h)}{2h}. \quad (6)$$

Slično, zbrajajući jednakosti

$$\begin{aligned} y(a + h) &\approx y(a) + h y'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a), \\ y(a - h) &\approx y(a) - h y'(a) + \frac{h^2}{2} y''(a), \end{aligned}$$

dobivamo

$$y''(a) \approx \frac{y(a + h) - 2y(a) + y(a - h)}{h^2}. \quad (7)$$

Na taj način rubni problem (5) svodi se na rješavanje sustava tzv. diferencijalnih jednačini:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + p_k \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + q_k y_k = f_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad (8)$$

gdje je

$$y_k = y(x_k), \quad p_k = p(x_k), \quad q_k = q(x_k), \quad f_k = f(x_k),$$

pri čemu je specijalno: $y_0 = \alpha$, $y_n = \beta$.

Primijetite da je (8) trodijagonalan sustav linearnih jednačini.

Zadatak 4 (Metoda konačnih diferencija za rješavanje rubnih problema)

Neka su $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ i $\varphi : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^2$ neprekidne funkcije. Traži se $u \in C^2(\Omega \cup \partial\Omega)$ koja je rješenje rubnog problema za Poissonovu diferencijalnu jednačinu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u(x, y) &= \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Za $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ i $h = 1/3$ riješite problem direktno primjenom LU-dekompozicije i primjenom Jacobijeve Gauss-Seidelove i SOR metode. Uz točnost rješenja na 6 značajnih znamenki provjerite brzinu iterativnog postupka spomenutih iterativnih metoda

a) u slučaju $f(x, y) \equiv 0$ i

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4500x(1-x) & (x, y) \in \partial\Omega \ \& \ y = 1 \\ 0 & (x, y) \in \partial\Omega \ \& \ y \neq 1 \end{cases},$$

b) u slučaju $f(x, y) = x + y + 1$ i $\varphi(x, y) = 1 + x^2$.

Razmotrite prethodne probleme za $h = \frac{1}{40}$. Konzultirajte [5], [7], [10], [16],

Zadatak 5 Metoda konačnih diferencija za rješavanje jednadžbe provođenja toplinerubnih problema - Parabolička jednadžba

Promatrajte jednadžbe provođenja topline (parabolička jednadžba)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1),$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad (t \geq 0)$$

$$u(1, t) = b(t), \quad (t \geq 0)$$

te primjere

a)

$$g(x) = \sum_{i=1}^n c_i \sin(i\pi x), \quad a(t) = b(t) = 0$$

Rješenje usporedite s egzaktnim rješenjem $u(x, t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{-i^2 \pi^2 t} \sin(i\pi x)$.

b)

$$g(x) = \sin(\pi x), \quad a(t) = b(t) = 0$$

Rješenje usporedite s egzaktnim rješenjem $u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$.

Literatura

- [1] G. DAHLQUIST, A. BJÖRCK *Numerische Methoden*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1972.
(postoji i engleski prijevod)
- [2] J. W. DEMEL, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [3] P. E. GILL, W. MURRAY AND M. H. WRIGHT, *Numerical Linear Algebra and Optimization*, Vol.1., Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1991.
- [4] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN *Matrix Computations*, The J.Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- [5] D. KINCAID, W. CHENEY, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.
- [6] S. Kurepa, *Matematička analiza I*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.
- [7] *The NAG Library*:
- [8] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [9] H. R. SCHWARZ, *Numerische Mathematik*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [10] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

- [11] H. SPÄTH, *Spline-Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen*, R. Oldenbourg Verlag, München, 1973.
- [12] J. STOER, R. BULIRSCH *Numerische Mathematik II*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [13] J. STOER, R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [14] V. ŠIMIĆ, *Otpornost materijala I, II*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [15] L. N. TREFETHEN, D. BAU, *Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.
- [16] D. M. YOUNG, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Dover Publications, Inc., New York, 2003.
- [17] S. WOLFRAM, *The Mathematica Book*, Wolfram Media, Champaign, 1998.