Iterativne metode za rješavanje sustava linearnih jednadžbi

1 Uvod

Do sada razmatrane metode za rješavanje sustava

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

(Gaussov postupak, LU–dekompozicija, Cholesky–dekompozicija, QR–dekompozicija) spadaju u tzv. direktne metode. Budući da je broj potrebnih računskih operacija kod metoda dekompozicije reda veličine n^3, za velike matrice s puno elemenata koji iščezavaju (tzv. *large sparse matrices*) ove metode ne mogu se preporučiti. Osim toga, treba ekonomizirati i s brojem elemenata matrice za koje treba rezervirati mjesto u memoriji računala. Takve situacije javljaju se primjerice kod proučavanja električnih mreža, kod velikih ekonometrijskih modela nacionalne privrede, kod spline–interpolacija, kod rješavanja rubnih problema za obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe, itd. Upravo se iterativne metode, o kojima ćemo reći samo nekoliko osnovnih činjenica, koriste u takvim situacijama (vidi [8], [7]).

Na početku spomenimo dvije klasične iterativne metode za rješavanje sustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pretpostavljamo da je $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

- **Jacobijeva metoda**

$$\begin{array}{llllll}
x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 & -a_{12}x_2^{(k)} & -a_{13}x_3^{(k)} & \ldots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} & & -a_{23}x_3^{(k)} & \ldots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} & -a_{32}x_2^{(k)} & & \ldots & -a_{3,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{3n}x_n^{(k)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} & -a_{n2}x_2^{(k)} & -a_{n3}x_3^{(k)} & \ldots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}) &
\end{array}$$

  odnosno:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

- **Gauss-Seidelova metoda**

$$\begin{array}{llllll}
x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 & -a_{12}x_2^{(k)} & -a_{13}x_3^{(k)} & \ldots & -a_{1,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{1n}x_n^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} & & -a_{23}x_3^{(k)} & \ldots & -a_{2,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{2n}x_n^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} & -a_{32}x_2^{(k+1)} & & \ldots & -a_{3,n-1}x_{n-1}^{(k)} & -a_{3n}x_n^{(k)}) \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} & -a_{n2}x_2^{(k+1)} & -a_{n3}x_3^{(k+1)} & \ldots & -a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}) &
\end{array}$$

  odnosno:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

Primjer 1 *Jacobijevu, odnosno Gauss-Seidelovu metodu testirat ćemo na sustavu* $\mathbf{A}\,\mathbf{x}=\mathbf{b}$ *gdje je*

$$a_{ij}=\frac{1}{i+j-1},\qquad b_i=\frac{i}{100},\qquad i,j=1,\ldots,n.$$

Ovu matricu $\mathbf{A}$ *zovemo* Hilbertova matrica. *Ona je simetrična i pozitivno definitna, ali je njen broj uvjetovanosti vrlo velik.*

```
In[1]:= n = 4; a = Table[1/(i + j - 1), {i, n}, {j, n}];
              b = Table[i/100, {i, n}];
                 Print["A = ", MatrixForm[a], "    b = ", MatrixForm[b]];
             lam=Eigenvalues[N[a]]
                 Print["cond(A)=", lam[[1]]/lam[[n]]  ];
```

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&\frac12&\frac13&\frac14\\ \frac12&\frac13&\frac14&\frac15\\ \frac13&\frac14&\frac15&\frac16\\ \frac14&\frac15&\frac16&\frac17\end{bmatrix},\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}\frac{1}{100}\\ \frac{2}{100}\\ \frac{3}{100}\\ \frac{4}{100}\end{bmatrix}$$

$$\{1.50021, 0.169141, 0.00673827, 0.0000967023\}$$
$$cond(A)=15513.7$$

Implementacija navedenih metoda može se obaviti na bazi niže navedenih *Mathematica*-modula.

```
Jacobi[a_, b_, n_, eps_, it_] := Module[{k = 0, xs, xn}, xs = xn = Table[1., {i, n}];
       While[
             Do[
                 xn[[i]] = (b[[i]] - Apply[Plus, ReplacePart[a[[i]], 0, {i}] xs])/a[[i, i]],
                    {i, n}] // N;
               error = Max[Abs[xn - xs]];
                   error  > eps && k < it,
                      Print["It_", k, " = ", xn, "  error=", error];
                         xs = xn;
        k = k + 1]
                                        ]

GS[a_, b_, n_, eps_, it_] := Module[{k = 0, xs, xn}, xs = xn = Table[1., {i, n}];
        While[
              Do[
                  xn[[i]] = (b[[i]] - Sum[a[[i, j]]xn[[j]], {j, i - 1}]
                                    - Sum[a[[i, j]]xs[[j]], {j, i + 1, n}])/a[[i, i]],
               {i, n}] // N;
                error = Max[Abs[xn - xs]];
                  error  > eps && k < it,
                      Print["It_", k, " = ", xn, "  error=", error];
                        xs = xn
           k = k + 1]
```

U cilju ispitivanja konvergencije navedenih, pa i drugih iterativnih metoda, na Banachovom prostoru $\mathbb{R}^n$ uvest ćemo metriku $d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$,

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|,\quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

čime $\mathbb{R}^n$ postaje i potpuni metrički prostor.

Definicija 1 *Preslikavanje* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *zovemo* kontrakcija *ako postoji takav realni broj* $q<1$*, da bude*

$$d(F(\mathbf{x}),F(\mathbf{y}))<q\,d(\mathbf{x},\mathbf{y})\qquad \textit{za sve } \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$$

Teorem 1 (Banachov teorem o fiksnoj točki) *Neka je funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kontrakcija. Tada postoji jedinstvena* fiksna točka $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ *funkcije F, tj.*

$$F(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*.$$

Osim toga, za proizvoljni $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, niz definiran rekurzivnom formulom $\mathbf{x}_{k+1} = F(\mathbf{x}^k)$ konvergira prema $\mathbf{x}^*$ i vrijedi formula za ocjenu pogreške

$$d(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^*) \leq \frac{q}{1-q} d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}) \leq \frac{q^k}{1-q} d(\mathbf{x}_0, F(\mathbf{x}_0)),\ k = 0, 1, \ldots$$

Ako matricu sustava $\mathbf{A}$ rastavimo na donji trokut, dijagonalu i gornji trokut,

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U} = \mathbf{D}(\hat{\mathbf{L}} + \mathbf{I} + \hat{\mathbf{U}}), \quad \mathbf{D} = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn}),$$

dobivamo matrični oblik

- Jacobijeve metode

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{U}})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{4}$$

- Gauss-Seidelove metode

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\hat{\mathbf{L}}\mathbf{x}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{U}}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

Sljedeća rekurzivna formula obuhvaća obje metode

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, \ldots ; \tag{6}$$

za $\mathbf{B} = \mathbf{B}_J := -(\hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{U}})$ dobivamo Jacobijevu, a za $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{GS} := -(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{L}})^{-1}\hat{\mathbf{U}}$ dobivamo Gauss-Seidelovu metodu.

Primijetimo da je funkcija $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{x} + \mathbf{c}$ kontrakcija onda i samo onda ako je $\|\mathbf{B}\| = q < 1$. Tada prema Banachovom teoremu o fiksnoj točki niz $(x^{(n)})$ definiran s (6) konvergira prema jedinstvenom rješenju sustava $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ i vrijedi ocjena pogreške

$$\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\| \leq \frac{q}{1-q} \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|.$$

Primjedba 1 *Kod Jacobijeve metode matrica $\mathbf{B}_J$ ima elemente $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}$, $i \neq j$, $b_{ii} = 0$, pa*

$$\|\mathbf{B}_J\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \Longrightarrow \sum_{j \neq i}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} < 1 \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Dakle, Jacobijeva metoda konvergirat će ako je $\mathbf{A}$ strogo dijagonalno dominantna matrica.

Ako rekurzivnu formulu (4), odnosno (5), pomnožimo s $\mathbf{D}$ i dodamo i oduzmemo $\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k)}$, odnosno $(\mathbf{D} + \mathbf{L})\mathbf{x}^{(k)}$, dobivamo

$$\mathbf{D}\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{7}$$

odnosno

$$(\mathbf{D} + \mathbf{L})\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

Odavde se odmah vidi da ako je niz $(\underline{x}^{(k)})$ konvergentan, on konvergira prema rješenju susatva (1).

U cilju poboljšanja, posebno ubrzavanja konvergencije u iterativne metode uvode se tzv. iteracijski parametri. Tako se primjerice metode (7) i (8) redefiniraju kao:

$$\mathbf{D}\tfrac{\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots$$
$$(\mathbf{D}+\mathbf{L})\tfrac{\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Primjedba 2 *Primijetite da su sve do sada razmatrane metode* jednokoračne*, tj.* $\mathbf{x}^{(k+1)}$ *ovisi samo o prethodnoj* $\mathbf{x}^{(k)}$ *iteracji. Postoje i višekoračne metode (vidi primjerice [8]).*

Opći tzv. kanonski oblik jednokoračnih iteracijskih metoda je oblika:

$$\mathbf{B}_{k+1}\frac{\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{b}, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{9}$$

gdje je $\mathbf{B}_k$ niz matrica u principu takvih da je njihovo invertiranje jednostavnije nego invertiranje matrice $\mathbf{A}$, a τ_k je niz iteracijskih parametara o kojima će kasnije biti više riječi. Naime (9) možemo shvatiti tako da $\mathbf{x}^{(k+1)}$ dobivamo rešavanjem sustava

$$\mathbf{B}_{k+1}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{F}^{(k)}.$$

Primjerice kod Jacobijebe metode $\mathbf{B}_k = \mathbf{D}$, a kod Gauss-Seidelove $\mathbf{B}_k = \mathbf{D}+\mathbf{L}$. Specijalno, kažemo da je metoda (9) eksplicitna ako je $\mathbf{B}_k = \mathbf{I}$ ($\mathbf{x}^{(k+1)}$ dobiva se eksplicitno preko $\mathbf{x}^{(k)}$); u protivnom metodu zovemo implicitnom. Za metodu (9) kažemo da je stacionarna ako je $\mathbf{B}_{k+1} = \mathbf{B}$ i $\tau_{k+1} = \tau$. Za primjer navedimo jednu stacionarnu i jednu nestacionarnu eksplicitnu metodu:

- Metoda jednostavnih iteracija – stacionarna metoda

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}}{\tau} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{k} = \mathbf{b} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots$$

- Richardsonova metoda – nestacionarna metoda

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}}{\tau_{k+1}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{k} = \mathbf{b} \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Najpoznatija stacionarna metoda je tzv. Successive Overrelaxation Method (SOR), koju dobijemo malom modifikacijom Gauss-Seidelove metode (8).

$$(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})\frac{\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}}{\omega} + \mathbf{A}\mathbf{x}^{k} = \mathbf{b} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

odnosno

$$(\mathbf{I}+\omega\hat{\mathbf{L}})\mathbf{x}^{k+1} = \left[(1-\omega)\mathbf{I} - \omega\hat{\mathbf{U}}\right]\mathbf{x}^{k} + \omega\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

odnosno po koordinatama

$$x_i^{(k+1)} + \omega\sum_{j=1}^{i-1}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} - \omega\sum_{j=i+1}^{n}\frac{a_{ij}}{a_{ii}}x_j^{(k)} + \omega\frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{12}$$

Literatura

[1] D. Kincaid,W. cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/cole Publishing company, New York, 1996.

[2] G. Dahlquist, A. Björck *Numerische Methoden*, R. Oldenbourg Verlag, München, Wien, 1972. (postoji i engleski prijevod)

[3] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, cambridge University Press, cambridge, 1989.

[4] A. A. Samarski, A. V. Gulin, *Numeričke metode* (na ruskom), Nauka, Moskva, 1989.

[5] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[6] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1993

[7] J. Stoer, R. Bulirsch, *Numerische Mathematik 2, 3. Auflage*, Springer-Verlag, Berlin, 1990

[8] D. M. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*, Dover Publications, Inc., Mineola, 2003.