Svojstveni problem

Kristian Sabo, Rudolf Scitovski

1 Uvod i motivacija – kontrakcija i dilatacija ravnine

Neka je $X_0(M)$ vektorski prostor u ravnini, a $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav. Definirajmo linearni operator $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(X_0)$ na sljedeći način

$$\mathcal{C}(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + \gamma x_2e_2, \qquad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Primijetite da je linearni operator $\mathcal{C}$ specijalno

- za $\gamma = 1$ jedinični linearni operator ($\mathcal{C} = \mathcal{I}$);
- za $\gamma = 0$ projekcija na prvu koordinatnu os;
- za $\gamma = -1$ simetrija obzirom na prvu koordinatnu os;

U općem slučaju linearnom operatoru $\mathcal{C}$ u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$. Pogledajmo kako linearni operator $\mathcal{C}$ djeluje na neke geometrijske objekte u ravnini.

- (kružnica) Jediničnu kružnicu sa središtem u točki O

  $$\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

  preslikava u elipsu

  $$\mathcal{C}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi^2 + \frac{\eta^2}{\gamma^2} = 1\}.$$

  Naime, točka $T = (x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ prelazi u točku $T' = (\xi, \eta)$, pri čemu je

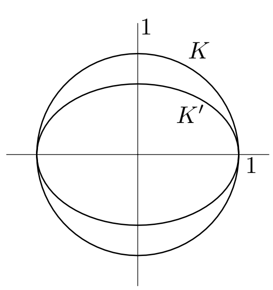
  $$\xi = x_1, \qquad \eta = \gamma x_2$$
  $$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \xi^2 + \tfrac{\eta^2}{\gamma^2} = 1.$$

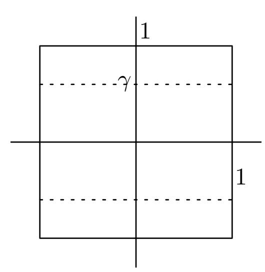
- (pravokutnik) Pravokutnik

  $$\mathcal{P} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x_1 \le 1, \quad -1 \le x_2 \le 1\}$$

  preslikava u pravokutnik

  $$\mathcal{C}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}' = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le \xi \le 1, \quad -\gamma \le \eta \le \gamma\}.$$





Iz prethodnih primjera moglo se vidjeti da linearni operator $\mathcal{C}$ steže (odnosno rasteže) geometrijske objekte u smjeru druge koordinatne osi. To su razlozi zbog kojih linearni operator $\mathcal{C}$

- za $|\gamma| < 1$ zovemo **kontrakcija** (stezanje) prema prvoj koordinatnoj osi;
- za $|\gamma| > 1$ zovemo **dilatacija** (rastezanje) prema prvoj koordinatnoj osi;

Definirajmo sada linearni operator $\mathcal{A}_1$, koji steže (rasteže) ravninu u smjeru prve koordinatne osi i linearni operator $\mathcal{A}_2$, koji steže (rasteže) ravninu u smjeru druge koordinatne osi

$$\mathcal{A}_1(x_1e_1 + x_2e_2) = \alpha_1x_1e_1 + x_2e_2, \quad \alpha_1 > 0,$$
$$\mathcal{A}_2(x_1e_1 + x_2e_2) = x_1e_1 + \alpha_2x_2e_2, \quad \alpha_2 > 0,$$

kojima u bazi (e_1, e_2) pripadaju matrice $A_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, odnosno $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$. Linearni operator $\mathcal{A}$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $A = A_1A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}$ zadan je s

$$\mathcal{A}(x_1e_1 + x_2e_2) = \alpha_1x_1e_1 + \alpha_2x_2e_2, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0.$$

On jediničnu kružnicu $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ preslikava u elipsu

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{x_2^2}{\alpha_2^2} = 1.$$

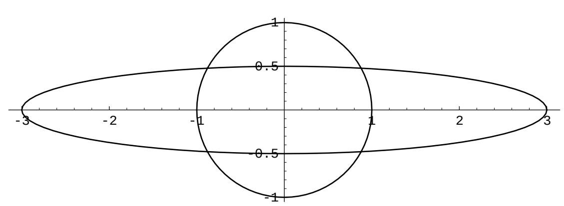
Naime, točku $T = (x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ preslikava u točku $T' = (\xi, \eta)$, pri čemu je

$$\xi = \alpha_1x_1, \qquad \eta = \alpha_2x_2$$
$$x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\xi}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\alpha_2}\right)^2 = 1.$$

Primjerice, za $\alpha_1 > 1$ i $\alpha_2 < 1$ rasteže kružnicu $\mathcal{K}$ u smjeru prve koordinatne osi i steže u smjeru druge koordinatne osi.

Primjenom programskog sustava *Mathematica* pomoću kratkog niže navedenog programa pogledajte djelovanje linearnog operatora kontrakcije za različite vrijednosti parametara α_1, α_2.

```
In[1]:= << Graphics`ImplicitPlot`
In[2]:= al1 = 3; al2 = 1/2;
        ImplicitPlot[{x^2 + y^2 == 1, (x/al1)^2 + (y/al2)^2 == 1}, {x, -al1, al1}];
```



Zadatak 1 *Neka je $X_0(M)$ vektorski prostor u ravnini, a $(O; e_1, e_2)$ pravokutni koordinatni sustav. Definirajte linearne operatore projekcije i simetrije obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta, te ispitajte njegovo djelovanje na jediničnu kružnicu i kvadrat sa središtem u ishodištu O koordinatnog sustava.*

Primjer 1 *Zadan je linearni operator $\mathcal{C}$, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tj.*

$$\mathcal{C}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = (2x_1 + x_2)e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2.$$

Razmotrimo djelovanje ovog linearnog operatora na jediničnu kružnicu $\mathcal{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$.

Linearni operator $\mathcal{C}$ vektor $x_1 e_1 + x_2 e_2$, gdje je $(x_1, x_2) \in \mathcal{K}$ preslikava u neki novi vektor $\xi e_1 + \eta e_2$, tako da je $\mathcal{C}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \xi e_1 + \eta e_2$, tj.

$$(2x_1 + x_2)e_1 + (x_1 + 2x_2)e_2 = \xi e_1 + \eta e_2.$$

Iz jednakosti

$$2x_1 + x_2 = \xi, \qquad x_1 + 2x_2 = \eta,$$

dobivamo

$$x_1 = \frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta, \qquad x_2 = -\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta.$$

Zato jedinična kružnica $\mathcal{K}$ djelovanjem linearnog operatora $\mathcal{C}$ prelazi u elipsu (vidi sliku):

$$\left(\frac{2}{3}\xi - \frac{1}{3}\eta\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\xi + \frac{2}{3}\eta\right)^2 = 1.$$

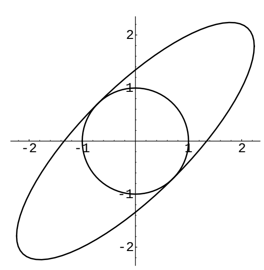
Primijetite da je matrica C linearnog operatora $\mathcal{C}$ regularna i da je njena inverzna matrica zadana s $C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Zato imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(x_1 e_1 + x_2 e_2) = \xi e_1 + \eta e_2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 e_1 + x_2 e_2 &= \mathcal{C}^{-1}(\xi e_1 + \eta e_2) \\
&= \xi \mathcal{C}^{-1}(e_1) + \eta \mathcal{C}^{-1}(e_2) \\
&= \xi\left(\tfrac{2}{3}e_1 - \tfrac{1}{3}e_2\right) + \eta\left(-\tfrac{1}{3}e_1 + \tfrac{2}{3}e_2\right) \\
&= \left(\tfrac{2}{3}\xi - \tfrac{1}{3}\eta\right)e_1 + \left(-\tfrac{1}{3}\xi + \tfrac{2}{3}\eta\right)e_2.
\end{aligned}$$

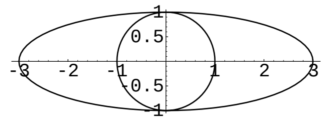
Sliku kružnice $\mathcal{K}$ i elipse $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ možemo dobiti na sljedeći način

```
In[1]:= << Graphics‘ImplicitPlot‘

In[2]:= C = {{2, 1}, {1, 2}};
          K1[x1_, y1_] = (Inverse[C][[1]].{x1, y1})^2 + (Inverse[C][[2]].{x1, y1})^2 == 1
               ImplicitPlot[{x1^2 + y1^2 == 1, K1[x1, x2]}, {x1, -3, 3}];
```



Ako isti program ponovimo za linearni operator $\mathcal{D}$ kome u bazi e_1, e_2 pripada matrica $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dobit ćemo sličnu sliku (rotiranu za $\frac{\pi}{4}$)



a jednadžba pripadne krivulje $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ bit će

$$\frac{1}{9}\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

To znači da linearni operatori $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ na sličan način transformiraju prostor $\mathbb{R}^2$. Što je tome razlog?

2 Svojstveni problem

Definicija 1 *Kažemo da je kompleksni broj $\lambda \in \mathbb{C}$* svojstvena (karakteristična) vrijednost *linearnog operatora $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ako postoji $x \in \mathbb{R}^n$, $\quad x \neq 0$, takav da je*

$$A\,x = \lambda x.$$

Spomenuti vektor x zovemo svojstveni (karakteristični) vektor *linearnog operatora $\mathcal{A}$ koji pripada svojstvenoj vrijednosti λ.*

Skup $\sigma(\mathcal{A})$ svih svojstvenih vrijednosti linearnog operatora $\mathcal{A}$ zovemo spektar linearnog operatora $\mathcal{A}$, a broj

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \max_{\lambda \in \sigma(\mathcal{A})} |\lambda|$$

spektralni radijus linearnog operatora $\mathcal{A}$.

Neka je A matrica linearnog operatora $\mathcal{A}$. Može se pokazati da je λ svojstvena vrijednost linearnog operatora $\mathcal{A}$ onda i samo onda ako je

$$\det(A - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{2}$$

Na lijevoj strani jednakosti (2) je polinom n-tog stupnja u λ, koji zovemo svojstveni (karakteristični) polinom matrice A, odnosno linearnog operatora $\mathcal{A}$. Vrijedi (vidi primjerice [9, 10])

$$(-1)^n \det(A - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^n - \mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A = 0,$$

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad \mathrm{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Specijalno, simetrični linearni operator $\mathcal{A}$ ima sve svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ realne, a odgovarajući svojstveni vektori mđusobno su okomiti. [1] To je posljedica sljedećeg teorema (vidi primjerice [10]):

Teorem 1 *Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ simetričan linearni operator. Postoji ortonormirana baza $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ u $\mathbb{R}^n$ i realni brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takvi da je $\mathcal{A}\,\mathbf{v}_k = \lambda_k\,\mathbf{v}_k \quad (k = 1, \ldots, n)$. U toj ortonormiranoj bazi operatoru $\mathcal{A}$ pripada dijagonalna matrica $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.*

[1] Podsjetimo se da linearni operator $\mathcal{A} : \mathsf{R}^n \to \mathsf{R}^n$ zovemo simetrični ako za sve $x, y \in \mathsf{R}^n$ vrijedi $(\mathcal{A}\,x, y) = (x, \mathcal{A}\,y)$

To također znači da postoji realna ortogonalna matrica V takva da je

$$V^T A V = \mathbf{D}, \tag{3}$$

pri čemu je $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Stupci matrice V su odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori matrice A.

Primjer 2 *Lako se vidi da su linearni operatori $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ iz* t.1 *ustvari isti linearni operator, kome u bazi e_1, e_2 pripada matrica C, a u bazi*

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2, \qquad \mathbf{v}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} e_2$$

matrica D, pri čemu vrijedi

$$V^T A V = \mathbf{D}, \quad \textit{gdje je} \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

V je ortogonalna matrica i ona u bazi (e_1, e_2) definira linearni ortogonalni operator $\mathcal{V}$, koji ortonormiranu bazu (e_1, e_2) prevodi u ortonormiranu bazu (v_1, v_2).

3 Kvadratna forma

Definicija 2 *Funkciju $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiranu s*

$$q(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2, \qquad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \tag{4}$$

nazivamo kvadratna forma dviju varijabli.

Neka je $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator, kome u bazi (e_1, e_2) pripada matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Zbog simetričnosti matrice A i linearni operator $\mathcal{A}$ je simetrični linearni operator. Lako se može provjeriti da vrijedi

$$(\mathcal{A}x, x) = q(x_1, x_2), \quad \text{gdje je} \quad x = x_1 e_1 + x_2 e_2. \tag{6}$$

Prema Teoremu 1 za simetrični linearni operator $\mathcal{A}$ postoji ortonormirana baza (e_1', e_2') i realni brojevi $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1' \quad \& \quad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'.$$

Neka je $x = x_1' e_1' + x_2' e_2'$ prikaz vektora x u novoj bazi (e_1', e_2'). Onda vrijedi

$$q(x_1, x_2) = (\mathcal{A}x, x) = \lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2. \tag{7}$$

U različitim primjenama važno je razlikovati kvadratne forme koja primaju samo pozitivne (samo negativne) vrijednosti te one koje primaju i pozitivne i negativne vrijednosti. Zbog toga se kvadratne forme uobičajeno klasificiraju na sljedeći način (vidi primjerice [9, 10]):

Za kvadratnu formu (4) kažemo da je

- *pozitivno semidefinitna*, ako prima samo nenegativne vrijednosti;
- *negativno semidefinitna*, ako prima samo nepozitivne vrijednosti;
- *pozitivno definitna*, ako je pozitivno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0$ jedino u slučaju $x_1 = x_2 = 0$;
- *negativno definitna*, ako je negativno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0$ jedino u slučaju $x_1 = x_2 = 0$;
- *semidefinitna*, ako je pozitivno ili negativno semidefinitna;
- *definitna*, ako je pozitivno ili negativno definitna;
- *indefinitna*, ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti.

Iz (7) jednostavno se vidi da da je kvadratna forma (4) :

- pozitivno semidefinitna onda i samo onda ako je $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$;
- negativno semidefinitna onda i samo onda ako je $\lambda_1 \leq 0$, $\lambda_2 \leq 0$;
- pozitivno definitna onda i samo onda ako je $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$;
- negativno definitna onda i samo onda ako je $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

Svojstvo kvadratne forme može se odrediti i bez računanja svojstvenih vrijedosti odgovarajuće matrice. Vrijedi sljedeći teorem (vidi [9]).

Teorem 2 *Kvadratna forma (4) je*

- *pozitivno semidefinitna onda i samo onda ako je* $det(A) \geq 0$ *i* $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$;
- *negativno semidefinitna onda i samo onda ako je* $det(A) \geq 0$ *i* $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$;
- *pozitivno definitna onda i samo onda ako je* $det(A) > 0$ *i* $a_{11} > 0$;
- *negativno definitna onda i samo onda ako je* $det(A) > 0$ *i* $a_{11} < 0$;
- *indefinitna onda i samo onda ako je* $det(A) < 0$.

Zadatak 2 *Ispitajte svojstva sljedećih kvadratnih formi*

$$
\begin{array}{llll}
a) & q(x_1, x_2) = 4x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 & b) & q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2 \\
c) & q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 7x_1x_2 + 7x_2^2 & d) & q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2.
\end{array}
$$

Svojstva kvadratne forme iz prethodnog teorema definiraju se analogno i za pripadnu matricu linearnog operatora. Tako za simetričnu matricu A kažemo da je pozitivno semidefinitna (odnosno negativno semidefinitna, pozitivno definitna, negativno definitna, indefinitna) ako je pripadna kvadratna forma pozitivno semidefinitna (odnosno negativno semidefinitna, pozitivno definitna, negativno definitna, indefinitna). Navedena svojstva mogu se proširiti na simetrične matrice iz $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Primjer 3 *Izradit ćemo program koji će generirati* 1000 *slučajnih simetričnih matrica iz* $\mathbb{R}^{2\times 2}$. *Elementi matrica trebaju biti uniformno distribuirani slučajni brojevi iz intervala*

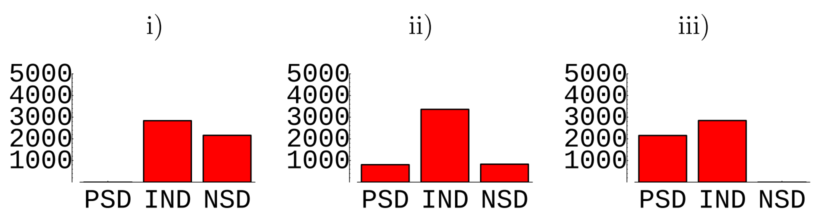
i) $[-10, 10]$ *ii)* $[-10, 0]$ *iii)* $[0, 10]$.

Za svaku skupinu matrica prebrojit ćemo koliko ima pozitivno semidefinitnih, negativno semidefinitnih, i indefinitnih matrica. Napravit ćemo histograme relativnih frekvencija te usporediti rezultate.

Primjenom sljedećeg jednostvanog Mathematica-modula dobivamo rezultate prikazane na slici.

```
In[1]:= << Graphics‘Graphics‘;
In[2]:= definitnost[alfa_, beta_, n_] := Module[{ind = psd = nsd = 0},
             Do[a1 = Table[Random[Real, {alfa, beta}], {i, 2}, {j, 2}];
                a = a1 + Transpose[a1];
                   svvr = Eigenvalues[a];
                       l1 = svvr[[1]]; l2 = svvr[[2]];
        If[l1 >= 0 && l2 >= 0, psd = psd + 1,
            If[l1 <= 0 && l2 <= 0, nsd = nsd + 1, ind = ind + 1]], {k, n}];
                x = {PSD, IND, NSD};
                     freq = {psd, ind, nsd};
        bar = BarChart[Transpose[{freq, x}], PlotRange -> {0, n}, DisplayFunction -> Identity]]

In[3]:= sl1 = definitnost[-10, 0, 5000]
            sl2 = definitnost[-10, 10, 5000];
                sl3 = definitnost[0, 10, 5000];
                     Show[GraphicsArray[{sl1, sl2, sl3}]];
```



Zadatak 3 *(Domaća zadaća) Poopćite program iz prethodnog zadatka na kvadratnu simetričnu matricu proizvoljnih dimenzija.*

Literatura

[1] D. Butković, *Kompleksni konačno dimenzionalni vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004

[2] J. W. Demmel, *Applied Numerical Linear Algebra*, SIAM, Philadelphia, 1997.

[3] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[4] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra – zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2003.

[5] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear algebra*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[6] K. Janich, *Linear Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[7] D. Kincaid,W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[8] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2005

[9] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[10] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[11] А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Наука, Москва, 1968.

[12] H. Neunzert, W. G. Eschmann, A. Blickensdörfer-Ehlers, *Analysis 2. Mit einer Einführung in die Vektor- und Matrizenrechnung*, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[13] И. В. Проскуряков, *Problems in linear algebra*, Мир, Москва, 1978.

[14] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1998, 2003.

[15] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, *Numerical Recipes*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[16] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000

[17] J. Stoer, R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd Ed., Springer Verlag, New York, 1993.

[18] Zhang, Fuzhen, *Linear Algebra*, The Johns Hopkins University Press, London, 1996.