Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Elektrotehnički fakultet
Kneza Trpimira bb
31 000 Osijek

Osijek, 08. ožujak 2009.

Seminarski rad iz predmeta "Matematičko programiranje"

# Metoda potencija za ~~rješavanje~~ najveće svojstvene vrijednosti

Marin Jelić[1], Dragan Panić[2]

**Sažetak.** U ovom seminarskom radu analizira se metoda potencija za računanje najveće svojstvene vrijednosti matrice $A$. Matrica $A$ je realna matrica tipa $n \times n$. Dane su osnovne karakteristike i svojstva ove metode. Izrađen je odgovarajući *Mathematica* modul pomoću kojega je analizirana metoda na nekoliko ilustrativnih primjera.

**Ključne riječi:** metoda potencija, svojstvene vrijednosti, karakteristični polinom, svojstveni vektori

**Abstract. (Power method for finding a dominant eigenvalue of matrix)** In this seminar paper Power method for finding dominant eigenvalue of $A$ is analysed, where $A$ is $n \times n$ real matrix. Basic characteristics and properties of this method are given. A corresponding *Mathematica* module is made by means of which the method is analysed on several illustrative examples.

**Keywords:** power method, eigenvalues, characteristic polynomial, eigenvector

| Preuzimanje seminara | Izlaganje | Ocjena | Datum | Potpis |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

[1] e-mail: mjelic@etfos.hr
[2] e-mail: dpanic2@etfos.hr

# 1 Uvod

Neka je $A$ kvadratna matrica tipa $n \times n$ s realnim ili kompleksnim članovima. Opći problem svojstvenih vrijenosti sastoji se u određivanju broja $\lambda$ i pripadnog vektora $x \neq 0$ tako da je

$$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

Broj $\lambda$ se zove svojstvena vrijednost, a vektor $x$ svojstveni vektor. Svojstveni je vektor određen do na faktor, tj. ako je $x$ svojstveni vektor, onda je $cx$ ($c = const.$) svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $\lambda$. Onda se problem

$$(A - \lambda I)x = 0, \tag{2}$$

zove problem svojstvenih vrijednosti (vidi Jukić (2000), str. 250).

Jednadžba (2) za svojstvenu vrijednost je homogeni linearni sustav jednadžbi, a ima netrivijalno rješenje $x \neq 0$ ako i samo ako je

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Razvojem determinante $det(A - \lambda I) = 0$ dobijemo

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P_n(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Nalaženje svojstvenih vrijednosti svodi se na polinomsku jednadžbu koja se zove karakteristična jednadžba, a sam polinom $P_n(\lambda)$ karakteristični polinom. Njegove nultočke su svojstvene vrijednosti.

# 2 Metoda potencija

Metoda potencija (Power Method) je metoda koja traži za zadanu kvadratnu matricu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ po modulu najveću svojstvenu vrijednost i pripadni svojstveni vektor. Metoda potencija razmatrat će se uz sljedeće pretpostavke:

1. Matrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ima $n$ linearno nezavisnih vektora $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

$$AV_i = \lambda_i V_i, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3}$$

2. Postoji jedinstvena po modulu najveća svojstvena vrijednost $\lambda_1$

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|. \tag{4}$$

Pretpostavimo da $A$ zadovoljava uvjete (3) i (4), tada izaberimo vektor $X_0 \in \mathbb{C}^n$, tako da ga možemo prikazati u bazi $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$

$$X_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2 + \cdots + c_n V_n \tag{5}$$

i koristeći (3) formiramo niz

$$\begin{aligned} AX_0 &= c_1\lambda_1 V_1 + c_2\lambda_2 V_2 + \cdots + c_n\lambda_n V_n \\ A^2X_0 &= c_1\lambda_1^2 V_1 + c_2\lambda_2^2 V_2 + \cdots + c_n\lambda_n^2 V_n, \\ A^3X_0 &= c_1\lambda_1^3 V_1 + c_2\lambda_2^3 V_2 + \cdots + c_n\lambda_n^3 V_n, \qquad k = 1, 2, \ldots \\ &\vdots \\ A^kX_0 &= c_1\lambda_1^k V_1 + c_2\lambda_2^k V_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k V_n \end{aligned}$$

Sada podijelimo zadnju jednadžbu s $\lambda_1^k$

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k X_0 = c_1 V_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k V_2 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k V_n$$

Kako $k$ postaje sve veći tako izrazi $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k + \cdots + \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k$ postaju sve manji i manji, te teže ka nuli ako i samo ako $k \to \infty$. Izrečenu tvrdnju možemo opravdati koristeći (4):$\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1, \ldots, \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right| < 1$. Za veliki $k$ vrijedi

$$\frac{1}{\lambda_1^k} A^k X_0 \approx c_1 V_1 \tag{6}$$

Jednadžba (6) dat će približnu vrijednost $\lambda_1$ sve dok je $c_1 \neq 0$ i $X_0$ nije ortogonalan s $V_1$. Ako jednadžba (6) daje približnu vrijednost, tada računanjem još jednog koraka poboljšat ćemo konačni rezultat, jer je $k + 1 > k$

$$\frac{1}{\lambda_1^{k+1}} A^{k+1} X_0 \approx c_1 V_1 \tag{7}$$

Pomnožimo li jednadžbe (6) i (7) sa bilo kojim vektorom $Y$ koji nije ortogonalan s $V_1$, tada imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1^k} A^k X_0 \cdot Y &\approx c_1 V_1 \cdot Y \\ \frac{1}{\lambda_1^{k+1}} A^{k+1} X_0 \cdot Y &\approx c_1 V_1 \cdot Y \\ \frac{1}{\lambda_1^{k+1}} A^{k+1} X_0 \cdot Y &\approx \frac{1}{\lambda_1^k} A^k X_0 \cdot Y \neq 0 \end{aligned}$$

nakon sređivanja imamo

$$\frac{A^{k+1} X_0 \cdot Y}{A^k X_0 \cdot Y} \approx \frac{\lambda_1^{k+1}}{\lambda_1^k} = \lambda_1. \tag{8}$$

Sama potencija (power) od $A$ daje ime metodi: metoda potencija (Power Method).

Kako odabrati $Y$ koji nije ortogonalan s $V_1$, odnosno s $X_0$?
Promotrimo li izraz (6), možemo zaključiti da je izraz $A^k X_0$ gotovo paralelan sa svojstvenim vektorom nakon $k$ iteracija, tada bi optimalan odabir vrijednosti za vektor $Y$ bio gore navedeni izraz. Zapišimo izraz (8) pomoću vektora $Y$.

$$\frac{A \cdot A^k X_0 \cdot Y}{A^k X_0 \cdot Y} = \frac{A \cdot Y \cdot Y}{Y \cdot Y} \approx \lambda_1.$$

Eksponencijalne funkcije su brzo rastuće funkcije koje u par iteracija postižu velike vrijednosti. Normiranjem vektora rješavamo ovaj problem i štedimo prostor u memoriji računala. Normiranje vektora vršimo na taj način, da se za zadani vektor utvrdi njegova najveća komponenta, te se cijeli vektor podjeli s apsolutnom vrijednošću te komponente.

Za povećanje brzine konvergencije svojstvene vrijednosti koristit ćemo Aitken metodu (vidi [4])

$$\lambda'_{k+2} = \lambda_{k+2} - \frac{(\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1})^2}{\lambda_{k+2} - 2 \cdot \lambda_{k+1} + \lambda_k}.$$

Metoda potencija ne daje egzaktnu svojstvenu vrijednost, odnosno svojstveni vektor. Nameće se pitanje kada je potrebno zaustaviti iterativni proces, tj. s kolikom točnošću želimo rezultat. Najbolju ocjenu pogreške imali bismo kada bi posjedovali egzaktnu svojstvenu vrijednost $\lambda_1^{egzaktno}$, tada ocjenu pogreške računamo pomoću izraza

$$|\lambda_1^{racunato} - \lambda_1^{egzaktno}| \leq \varepsilon.$$

Realno nikada nećemo znati koja je egzaktna svojstvena vrijednost, već ćemo raspolagati samo s računatim vrijednostima, tada ćemo računati ocjenu pogreške pomoću izraza

$$\left| \frac{\lambda_1^{racunato\ za\ korak\ k} - \lambda_1^{racunato\ za\ korak\ k+1}}{\lambda_1^{racunato\ za\ korak\ k+1}} \right| \leq \varepsilon.$$

Metoda potencija strogo se pridržava pretpostavki (3) i (4), suprotno ona će zakazati. Razmotrimo slučajeve kada metoda potencija zakaže:

1. Realna kvadratna matrica $n \times n$ (u daljnjem tekstu samo realna matrica) imat će $n$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora ako i samo ako se matrica može dijagonalizirati, samim pogledom na matricu ne možemo znati da li se ona može dijagonalizirati.

2. Realna matrica za svojstvene vrijednosti ima kompleksne brojeve koji dolaze u konjugirano-kompleksnim parovima ($|\lambda_1| = |\lambda_2|$), tada ne postoji dominantna po modulu najveća svojstvena vrijednost, a samo kod simetrične matrice svojstvene vrijednosti su realne, kod kojih se nerijetko pojavljuju vrijednosti koje su po amplitudi jednake, a razlikuju se samo u predznaku, npr. $\pm\lambda_1$ (vidi Scitovski (2004), str. 61), tada metoda potencija neće konvergirati.

3. Ako za danu matricu postoji $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$, tada metoda sporo konvergira ka rješenju (izrazi $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right), \ldots, \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)$ približno su jednaki 1, te nakon $k$ iteracija sporo teže ka nuli).

# 3 Numerički eksperimenti

Na nekoliko praktičnih primjera, a na bazi vlastitog programa izrađenog u programskom sustavu *Mathematica* ilustrirat ćemo prednosti i nedostatke metode potencija.

**Primjer 1** *S točnošću $\varepsilon = 0.000005$ (5 signifikantnih decimala) treba odrediti svojstvenu vrijednost i svojstveni vektor matrice $A$.*

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Pozivom Mathemayica - naredbe Eigensystem za matricu $A$ dobivamo svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 1$ i odgovarajuće svojstvene vektore $V_1 = (1,1,1)^T$, $V_2 = (0,1,1)^T$, $V_3 = (1,0,1)^T$. Navedenim algoritmom PowerMethod izračunat ćemo najveću svojstvenu vrijednost i odgovarajući svojstveni vektor. Uz izbor $X_0 = (0.733395, 0.0378942, 0.228449)^T$ koji smo generirali pozivom naredbe Random, na ovaj način izbjegavamo loš odabir početnog vektora $X_0$, nakon 4 iteracije dobivamo

$$\lambda_1 = 6., \qquad V_1 = (1., 0.998584, 0.998584)^T.$$

Primjer lošeg početnog vektora je $X_0 = (1,2,3)^T$, pri čemu nakon 2 iteracije nećemo dobiti najveću svojstvenu vrijednost već

$$\lambda_1 = 4., \qquad V_1 = (7.62934 \cdot 10^{-6}, 0.999992, 1.)^T,$$

ako unesemo malu pogršku od 0.001 u drugu komponentu početnog vektora $X_0 = (1, 2.001, 3)^T$, tada nakon 8 iteracija dobivamo najvećvu svojstvenu vrijednost sa pripadnim svojstvenim vektorom

$$\lambda_1 = 6.00002, \qquad V_1 = (0.995386, 1., 1.)^T,$$

**Primjer 2** *S točnošću $\varepsilon = 0.000005$ (5 signifikantnih decimala) treba odrediti svojstvenu vrijednost i svojstveni vektor matrice $A$.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pozivom naredbe Eigensystem za matricu $A$ dobivamo svojstvene vrijednosti: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$ i odgovarajuće svojstvene vektore $V_1 = (0,-1,1)^T$, $V_2 = (0,1,1)^T$, $V_3 = (1,0,0)^T$. Samim pogledom na matricu $A$ ne možemo znati da ne postoji po modulu najveća svojstvena vrijednost. Algoritmom metode potencija izračunat ćemo najveću svojstvenu vrijednost i odgovarajući svojstveni vektor. Uz izbor $X_0 = (0.815609, 0.760405, 0.570791)^T$, nakon maksimalnog broja iteracija ($it = 20$) dobivamo

$$\lambda_1 = Indeterminate, \qquad V_1 = (1., 0.932315, 0.699834)^T.$$

Ovaj zadatak pokazuje, da algoritam zakaže kada imamo po predznaku različite, a po amplitudi jednake svojstvene vrijednosti $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3|$. Dodatni zadaci za vježbu mogu se naći u Elezović (1999), str. 136.

**Primjer 3** *S točnošću $\varepsilon = 0.000005$ (5 signifikantnih decimala) treba odrediti svojstvenu vrijednost i svojstveni vektor matrice $A$.*

$$A = \begin{bmatrix} 9.94607 & 0.100489 & 0.725955 & 8.38112 & 3.08474 & 9.80166 & 2.35405 & 4.16269 & 9.57386 & 9.36767 \\ 4.86583 & 4.30684 & 3.80272 & 4.77919 & 6.67421 & 8.79679 & 1.30581 & 8.96231 & 5.935 & 5.71297 \\ 2.49806 & 7.45975 & 0.345301 & 5.83563 & 2.55199 & 7.35926 & 9.61935 & 7.45451 & 9.46725 & 7.5576 \\ 7.2653 & 3.29182 & 9.89339 & 8.18994 & 2.39947 & 8.98498 & 6.09067 & 3.41075 & 5.72525 & 0.188198 \\ 4.78486 & 4.44843 & 9.79025 & 4.47523 & 2.28681 & 6.98868 & 9.44495 & 8.6396 & 9.73482 & 9.62942 \\ 9.8256 & 1.18509 & 0.267568 & 2.07181 & 2.5603 & 7.89326 & 0.374177 & 3.88188 & 0.160836 & 8.90828 \\ 4.28351 & 0.47113 & 4.43558 & 8.72008 & 9.49865 & 6.0227 & 4.64533 & 4.24485 & 7.21184 & 9.03402 \\ 5.20039 & 5.60525 & 7.47702 & 9.4046 & 5.37478 & 4.42016 & 7.20946 & 7.33279 & 2.81448 & 6.5269 \\ 6.83528 & 3.45091 & 2.65365 & 7.61862 & 2.55177 & 2.97978 & 8.21806 & 8.89854 & 3.05312 & 6.95708 \\ 3.57273 & 4.65369 & 5.84128 & 7.92307 & 8.37234 & 9.04844 & 8.36426 & 8.51847 & 2.99756 & 4.62827 \end{bmatrix}$$

Pozivom naredbe Eigensystem za matricu $A$ dobivamo najveću svojstvenu vrijednost: $\lambda_1 = 56.6167$ i odgovarajući svojstveni vektor $V_1 = (-0.303954, -0.300338, -0.32584, -0.290581, -0.386847, -0.19818, -0.32849, -0.342725, -0.298075, -0.351652)^T$. Algoritmom metode potencija izračunat ćemo najveću svojstvenu vrijednost i odgovarajući svojstveni vektor. Uz izbor $X_0 = (0.11548, 0.118568, 0.0183079, 0.810137, 0.431952, 0.773477, 0.752943, 0.0482754, 0.176775, 0.475499)^T$, nakon 2 iteracije dobivamo

$$\lambda_1 = 56.6167, V_1 = (0.785723, 0.776375, 0.842295, 0.751153, 1., 0.512295, 0.849147, 0.885943, 0.770525, 0.90902)^T.$$

Niže je naveden modul `PowerMethod` kojim se uz primjenu metode potencija traži po modulu najveću svojstvenu vrijednost i pripadni svojstveni vektor za zadanu matricu $A$.

```
PowerMethod[A_, eps_, it_, P_] :=
   Module[{a = A, x0, error, k, y, lamK, lamK1, lamK2, lamK3,
lam1, lam2, scaleYk, scaleYk1, scaleYk2, scaleYk3},
    (* A - zadana kvadratan matrica *)
    (* X - pretpostavljeni svojstveni vektor *)
    (* eps - tocnost *)
    (* P - ako je P==1 ispisuje se svaki korak, inace samo krajnji rezultat *)
    n = Length[a[[1]]];
    x0 = Table[Random[], {i, n}];
    (*Print["x0=", x0];*)
    k = 1;
    While[k <= it,
     (*------- k - korak -------*)
     y = a.x0;
     scaleYk = 1/Max[Abs[y]] y;
     lamK = a.scaleYk.scaleYk/scaleYk.scaleYk;
     x0 = scaleYk;
     (*------- k+1 - korak -------*)
     y = a.x0;
     scaleYk1 = 1/Max[Abs[y]] y;
     lamK1 = a.scaleYk1.scaleYk1/scaleYk1.scaleYk1;
     x0 = scaleYk1;
     (*------- k+2 - korak -------*)
     y = a.x0;
     scaleYk2 = 1/Max[Abs[y]] y;
     lamK2 = a.scaleYk2.scaleYk2/scaleYk2.scaleYk2;
     x0 = scaleYk2;
     (*------- k+3 - korak -------*)
     y = a.x0;
     scaleYk3 = 1/Max[Abs[y]] y;
     lamK3 = a.scaleYk3.scaleYk3/scaleYk3.scaleYk3;
```

```
     x0 = scaleYk3;
     (*------- Aitken method -------*)
     lam1 = lamK2 - (lamK2 - lamK1)^2/(lamK2 - 2*lamK1 + lamK);
     lam2 = lamK3 - (lamK3 - lamK2)^2/(lamK3 - 2*lamK2 + lamK1);
     If[P == 1, Print["Power Method: k=", k, ", lam1=", lam2, ", V1=", scaleYk3];];
     error = Abs[lam1 - lam2]/Abs[lam2];
     If[ error < eps, Return[{k, lam2//N, scaleYk3//N}]];
     k++];
    Return[{k, lam2//N, scaleYk3//N}];];
```

koji uz poziv

```
n = 10;
A = Table[10*Random[], {i, n}, {j, n}];
eps = 0.000005;
it = 20;
P = 0;
PowerMethod[A, eps, it, P]
```

daje broj potrebnih iteracija, po modulu najveću svojstvenu vrijednost, te pripadni svojstveni vektor

```
{2, 56.6167, {0.785723,0.776375,0.842295,0.751153,1.,0.512295,0.849147,0.885943,0.770525,0.90902}}
```

# Literatura

[1] N. Elezović, A. Aglić, *Linearna algebra zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 1999.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2000.

[3] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2004

[4] Aitken method, *http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/seriesacceleration.html*, 09. 03. 2009.