

1. kontrolna zadaća iz
Matematike III.

Zadatak 1 [15 bodova] Koliki je broj signifikantnih znamenki broja $a = 11.005342629 \pm 0.5 \times 10^{-2}$? Napišite broj a^* samo sa signifikantnim znamenkama.

$$[n = 4, \quad a^* = 11.01]$$

Zadatak 2 [15 bodova] Zadane su veličine $x = 2 \pm 0.05$, $y = 3 \pm 0.005$. Izračunajte približnu vrijednost funkcije $f(x, y) = x^3 y^2$ u točki (x^*, y^*) i procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku.

[25 bodova] $[f^* = 72, \quad \Delta f^* \approx 5.64, \quad \delta f^* = 0.078]$

Zadatak 3 [25 bodova] Izračunajte L_∞ normu matrice A i njene inverzne matrice A^{-1} , te broj uvjetovanosti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{7}{2} & 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi $Ax = b$ vektor slobodnih koeficijenata $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ promijeni za $\Delta \mathbf{b} = (0, -0.2, 0)^T$, a matrica \mathbf{A} ostane nepromijenjena, koliko se mož promijeniti rješenje \mathbf{x} sustava?

$$\text{Rješenje: } \|A\|_\infty = 12, \quad \|A^{-1}\|_\infty = 8 \quad \text{cond}_\infty(A) = 96,$$

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 96 \cdot 0.2 = 19.2,$$

Zadatak 4 [25 bodova] Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \end{aligned}$$

$$\text{Rješenje: } x = (3, 4, 5)^T$$

Zadatak 5 [15 bodova] Provjerite da se u intervalu $[0, 2]$ nalazi nultočka ξ funkcije $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. Metodom bisekcije izračunajte prve tri iteracije x_1, x_2, x_3 i procijenite apsolutnu pogrešku $|x_3 - \xi|$

$$\text{Rješenje: } x_1 = 1, \quad x_2 = 0.5, \quad x_3 = 0.75, \quad |x_3 - \xi| \leq 0.25$$

Zadatak 6 [15 bodova] U intervalu $[0, 1]$ nalazi se jedinstvena nultočka ξ funkcije $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$. Na kojem rubu intervala $[0, 1]$ treba izabrati početnu aproksimaciju x_0 da bi Newtonov iterativni postupak konvergirao? Izračunajte sljedeće dvije aproksimacije. Kolika je brzina konvergencije Newtonove metode? Napišite formulu za ocjenu pogreške.

$$\text{Rješenje: } x_0 = 1 \quad x_1 = 3/7 = 0.42857 \quad x_2 = 0.32337. \text{ Kvadratna.}$$