

## 2. kontrolna zadaća iz Matematike III.

**Zadatak 1** [25 bodova] Izračunajte  $L_\infty$  normu matrice  $A$  i njene inverzne matrice  $A^{-1}$ , te broj uvjetovanosti.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{11}{3} & -5 \\ 2 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi  $Ax = b$  vektor slobodnih koeficijenata  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$  promijeni za  $\Delta\mathbf{b} = (0.1, 0, 0)^T$ , a matrica  $\mathbf{A}$  ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje  $\mathbf{x}$  sustava?

Rješenje:  $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$ ,  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 12$   $cond_\infty(\mathbf{A}) = 96$ ,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 96 \cdot 0.1 = 9.9,$$

**Zadatak 2** [25 bodova] Rješite sustav linearnih jednadžbi, gdje su matrica sustava  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{b}$  zadani s

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 100 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Promijenimo vektor  $\mathbf{b}$  za  $\Delta\mathbf{b} = (0.1, 0)^T$ . Odredite egzaktno rješenje sustava  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$  i izračunajte relativne pogreške vektora  $\mathbf{b}$  i  $\mathbf{x}$ . Koliko puta je relativna pogreška rješenja veća od relativne pogreške vektora  $\mathbf{b}$ ?

**Zadatak 3** [25 bodova] Gaussovom metodom eliminacije riješite sustav linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31 \end{aligned}$$

Rješenje:  $x = (3, 4, 5)^T$

**Zadatak 4** [20 bodova] Primjenom trapezne formule napišite formulu za aproksimaciju integrala  $I = \int_0^1 f(x)dx$  i odgovarajuću pogrešku aproksimacije. Ako se zna da je  $M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = 12$ , na koliko dijelova treba podijeliti interval  $[0, 1]$  da bi se postigla točnost aproksimacije na 2 decimale?

Rješenje:  $eps = 0.005$ ,  $n = \lceil 14.1421 \rceil + 1 = 15$ .

**Zadatak 5** [25 bodova] Primjenom trapezne formule približno izračunajte vrijednost integrala  $I = \int_0^1 x^2 dx$  i odgovarajuću pogrešku aproksimacije tako da interval  $[0, 1]$  podijelite na 5 jednakih dijelova? Približno rješenje usporedite s točnim.

Rješenje: ?