

2. kontrolna zadaća iz  
Matematike III.

**Zadatak 1** [15 bodova] *Dopunite mjesta označena znakom  $\times$  u LU-dekompoziciji matrice  $A$ :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & \times & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & \times \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Rješenje: U matrici  $L$  nedostaje broj  $1/2$ , a u matricu  $U$  broj 4.

**Zadatak 2** [15 bodova] *Izračunajte  $L_\infty$  normu matrice  $A$  i njene inverzne matrice  $A^{-1}$ , te broj uvjetovanosti.*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{11}{3} & -5 \\ 2 & -\frac{7}{3} & -3 \\ 3 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

*Ako se prilikom rješavanja sustava jednadžbi  $Ax = b$  vektor slobodnih koeficijenata  $\mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$  promijeni za  $\Delta\mathbf{b} = (0.01, 0.02, 0.05)^T$ , a matrica  $\mathbf{A}$  ostane nepromijenjena, koliko će se promijeniti rješenje  $\mathbf{x}$  sustava?*

Rješenje:  $\|\mathbf{A}\|_\infty = 8$ ,  $\|\mathbf{A}^{-1}\|_\infty = 12$   $cond_\infty(\mathbf{A}) = 96$ ,

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{A}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = 96 \cdot 0.05 = 4.8,$$

**Zadatak 3** [25 bodova] *Riješite sustav linearnih jednadžbi  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , gdje je*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Rješenje:  $x = (-7, 6, 2)^T$

**Zadatak 4** [15 bodova] *Provjerite je li niže navedena matrica  $A$  pozitivno definitna? Dopunite mjesto označeno znakom  $\times$  u Cholesky-dekompoziciji matrice  $A$ :*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \times & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:  $\Delta_1 = 4 > 0$ ,  $\Delta_2 = 12 > 0$ ,  $\Delta_3 = 12 > 0$ .  $A$  je pozitivno definitna. U matrici  $L$  nedostaje broj  $(-1/2)$ .

**Zadatak 5** [10 bodova] *Nađite Householderovu matricu  $H$ , koja će vektor  $a = (-4, 3)^T$  preslikati na prvu koordinatnu os.*

Rješenje: a)  $\|a\| = 5$ ,  $b = (5, 0)^T$ ,  $\frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)^T$   $H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b)  $\|a\| = 5$ ,  $b = (-5, 0)^T$ ,  $\frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^T$   $H = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

**Zadatak 6** [5 bodova] *Izračunajte prve 3 iteracije kod Jacobijeve metode za rješavanje sustava jednačbi:  $2x + y = 1$ ,  $x + 3y = 2$  počevši od  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ .*

Rješenje:  $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ ,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{11}{18})$ .