Bertrandov paradoks

Zimska škola matematike

Predavači: Rebeka Čordaš i Nenad Šuvak

28. siječnja 2012.

1. Statistička definicija vjerojatnosti
2. Geometrijska vjerojatnost
3. Bertrand Arthur William Russell
4. Bertrandov paradoks
    - Prvi pristup
    - Drugi pristup
    - Treći pristup
5. Literatura

Statistička definicija vjerojatnosti

Primjer 1.

Ako je tenisač A pobijedio tenisača B u 9 od 11 susreta, njegova šansa za pobjedu u sljedećem susretu najčešće se prognozira kao $9:2$.

Princip primijenjen u ovom primjeru temelji se na mogućnosti nezavisnog ponavljanja uvijek istog pokusa (u ovom slučaju teniskog meča), a **stupanj vjerovanja** u pojavu događaja izražava se na temelju broja pojavljivanja i nepojavljivanja događaja prilikom svih ponavljanja.

Izražavanje stupnja vjerovanja u pojavu događaja moglo bi se numerički izraziti također stavljanjem u omjer dijela i cjeline tj. racionalnim brojem $\frac{9}{11}$.

Definicija 1.

Pokus je ponovljen n puta. Ako se pri tome događaj A realizirao n_A puta, broj n_A zovemo **frekvencija događaja** A. Broj

$$\frac{n_A}{n}$$

zovemo **relativna frekvencija događaja** A.

Uočimo da je

$$0 \leq n_A \leq n$$

te da je

$$0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1.$$

Napomena 1.

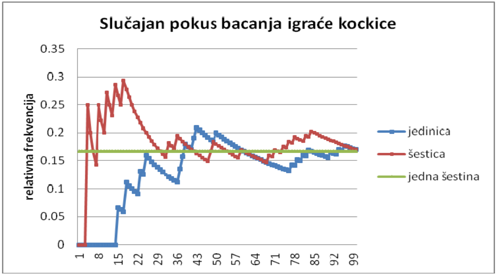
Iskustvo nas uči da se kod nezavisnog ponavljanja istog pokusa puno puta relativna frekvencija nekog događaja **stabilizira** oko nekog broja iz intervala $[0, 1]$.

To svojstvo zovemo **statistička stabilnost relativnih frekvencija**.

Ako pokus ima svojstvo statističke stabilnosti relativnih frekvencija, tada za **vjerojatnost događaja** A vezanog uz taj pokus uzimamo realan broj oko kojeg se grupiraju relativne frekvencije tog događaja i taj broj označavamo $P(A)$.

Primjer 2.

Bacanje pravilno izrađene igraće kockice



Slika: Grafički prikaz rel. frek. pojavljivanja 1 i 6 za 100 bacanja igraće kockice.

Geometrijska vjerojatnost I

Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}$

Definicija 2.

Neka je Ω omeđen interval relanih brojeva i $\lambda(\Omega)$ njegova duljina, te A podskup od Ω duljine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz intervala Ω bude sadržana u njegovom podskupu A je kvocijent duljine od A i duljine od Ω:

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$

Definicija 3.

Ne je Ω ograničen podskup ravnine i $\lambda(\Omega)$ njegova površina, te A podskup od Ω površine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz Ω bude sadržana u njegovom podskupu A je kvocijent površine od A i površine od Ω:

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Geometrijska vjerojatnost II

Napomena 2.

Ako sa $\lambda(\cdot)$ označimo mjeru nekog skupa (dakle duljinu u $\mathbb{R}$, površinu u $\mathbb{R}^2$, ...), vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz Ω bude sadržana u njegovom podskupu A geometrijskim pristupom definiramo kao kvocijent mjere skupa A i mjere skupa Ω.

Primjer 3.

Pomoću geometijske definicije vjerojatnosti odredimo:

a) kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka na kružnici radijusa R padne na kružni luk određen vrhovima A i B toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta? $(P(A) = \frac{1}{3})$

b) kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana točka u krugu radijusa R upravo središte S tog kruga? $(P(B) = 0)$

c) kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka u krugu radijusa R padne u jednakostraničan trokut upisan tom krugu? $(P(C) = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi})$

Bertrand Arthur William Russell

(18.5.1872. - 2.2.1970.)

- engleski filozof, matematičar, logičar, povjesničar i društveni reformator
- studirao filozofiju i matematiku na Trinity Collegeu u Cambridgeu
- matematički prikaz filozofije - monumentalno djelo "Principia mathematica" (u suradnji s A. N. Whiteheadom)
- 1950. godine dobio Nobelovu nagradu za književnost

Bertrandov paradoks

Formulacija problema

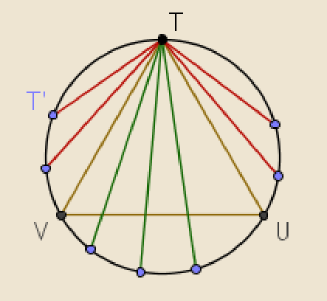
Kolika je vjerojatnost da duljina slučajno odabrane tetive kružnice bude veća od duljine toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta?

Uvedimo sljedeću oznaku

A - duljina slučajno odabrane tetive kružnice veća je od duljine toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta

Bertrandov paradoks - prvi pristup

- dana je kružnica radijusa R sa središtem u točki S
- izaberimo točku T na kružnici i upišimo jednakostraničan trokut $\triangle TUV$ s vrhom u točki T
- izaberemo drugu točku T' na kružnici i povucimo tetivu $\overline{TT'}$



Prvi pristup - "slučajne krajnje točke tetive"

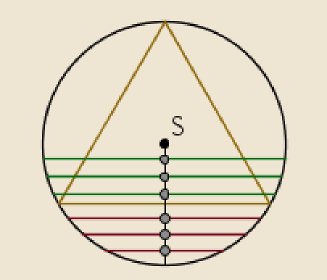
Bertrandov paradoks - prvi pristup

- uočimo - tetiva $\overline{TT'}$ dulja je od stranice kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta ako i samo ako točka T' leži na kružnom luku određenom točkama U i V
- duljina kružnog luka određenog točkama U i V jednaka trećini opsega kružnice $\longrightarrow$

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

Bertrandov paradoks - drugi pristup I

- dana je kružnica radijusa R sa središtem u točki S
- izaberemo neki radijus kružnice i rotiramo trokut tako da je jedna njegova stranica okomita na izabrani radijus
- izaberemo točku na tom radijusu i konstruiramo tetivu čije je polovište odabrana točka



Drugi pristup - "slučajna udaljenost od središta kružnice"

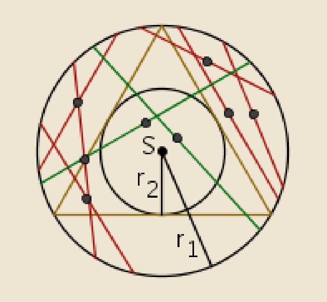
Bertrandov paradoks - drugi pristup

- uočimo - tetiva je dulja od stranice kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta ako i samo ako je udaljenost tetive od središta kružnice manja od polovice radijusa R
- slijedi da je tražena vjerojatnost $\longrightarrow$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

Bertrandov paradoks - treći pristup

- dan je krug radijusa R sa središtem u točki S
- izaberemo bilo koju točku unutar kruga i konstruiramo tetivu kojoj je odabrana točka polovište



Treći pristup - "slučajno odabrano polovište tetive"

Bertrandov paradoks - treći pristup

- uočimo - tetiva je dulja od stranice krugu upisanog jednakostraničnog trokuta ako i samo ako njezino polovište leži u tom trokutu upisanom krugu
- radijus jednakostraničnom trokutu opisane kružnice - R; radijus jednakostraničnom trokutu upisane kružnice - $\frac{R}{2}$
- površina kruga omeđenog upisanom kružnicom - četvrtina površine zadanog kruga $\longrightarrow$

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Bertrandov paradoks - kratka analiza

- za isti problem dobili smo tri različita rješenja - niti u jednom pristupu ne možemo naći pogrešku
- rješenje Bertrandovog problema ovisi o metodi slučajnog odabira tetive zadane kružnice - budući ne postoji jedinstvena metoda slučajnog obdabira tetive, niti rješenje nije jedinstveno
- bez dodatnih informacija o metodi slučajnog odabira tetive nemamo razloga preferirati niti jedno od tri dobivena rješenja
- **jednoznačno zadana metoda slučajnog odabira tetive** $\Rightarrow$ **jedinstveno rješenje Bertrandovog problema**

Literatura

1. N. Sarapa, *Kombinatorika, vjerojatnost i statistika*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.
2. I. Plavčić, T. Škrtić i D. Pavrlišak, *Matematički paradoksi*, math.e, br. 16
3. Wikipedia, Bertrandov paradoks
4. Wikipedia, Bertrand Arthur William Russell
5. Cut The Knot - Java appleti za Bertrandov paradoks