

Problem Buffonove igle u nastavi matematike

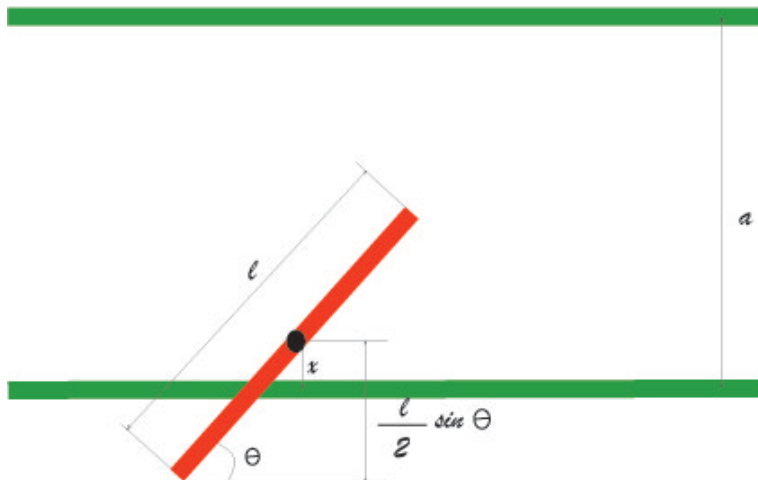


George-Louis Leclerc, de Buffon, 1707-1788

- Bacimo iglu slučajno na pod popločan daskama jednake širine ("brodski pod").
- Kolika je vjerojatnost da će igla siječe "crtu"?
- Problem geometrijske vjerojatnosti.

<http://www.metablake.com/pi.swf>

<http://www.ventrella.com/Bufon/Bufon.html>



l duljina igle

$a \geq l$, tj. "kratka igla"

x udaljenost polovišta igle do bližeg pravca

igla siječe pravac: $x \leq \frac{l}{2} \sin \theta$

igla ne siječe pravac: $x > \frac{l}{2} \sin \theta$

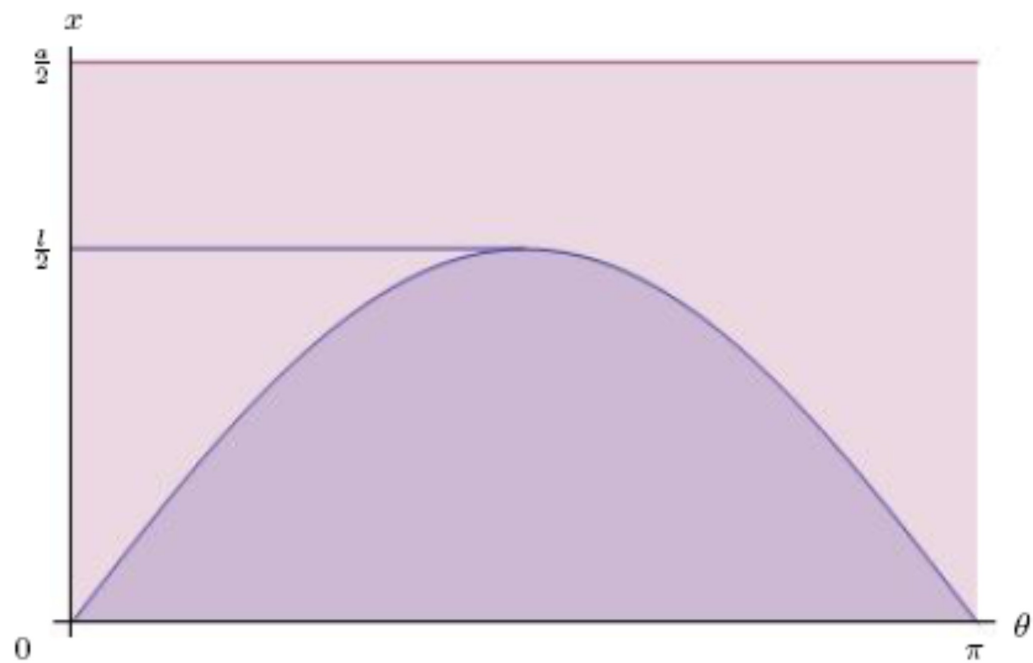
Računanje vjerojatnosti događaja A : igla siječe pravac

- Vjerojatnost kao mjera dijela u odnosu na cjelinu, geometrijska vjerojatnost:
 - opisati geometrijski skup realizacija događaja A i odrediti mu površinu: p_A
 - opisati geometrijski skup svih mogućih realizacija S i odrediti mu površinu: p_S
- vjerojatnost realizacije događaja A , $P(A)$:

$$P(A) = \frac{p_A}{p_S}$$

$$S = \{(x, \theta) : 0 \leq x \leq \frac{a}{2}\}$$

$$A = \{(x, \theta) : x \leq \frac{l}{2} \sin \theta\}$$



$$P(A) = \frac{p_A}{p_S} = \frac{2l}{a\pi}$$

Primjena vezana uz statističku metodu modeliranja vjerojatnosti:

Ako je pokus takav da ga možemo nezavisno ponavljati mnogo puta, relativna frekvencija pojavljivanja događaja A će se, s povećanjem broja ponavljanja pokusa, stabilizirati oko nekog broja koji predstavlja statistički definiranu vjerojatnost pojavljivanja događaja A .

- Ako imamo dobru aproksimaciju za broj π , možemo izvodeći ovaj pokus ilustrirati valjanost statističke definicije vjerojatnosti te diskutirati važnost velikog broja nezavisnih ponavljanja pokusa u statističkoj definiciji vjerojatnosti.

Prikladan je za formuliranje raznih projektnih zadataka 4. razredu gimnazija. Npr.

- Za ilustraciju valjanosti statističke metode modeliranja vjerojatnosti;
- Za određivanje aproksimativne vrijednosti broja π pod uvjetom da smo napravili statističku metodu modeliranja vjerojatnosti (povijesno vrlo popularno);
- Za ilustraciju i analizu približnog računanja u Bernoullijevoj shemi za veliki broj pokusa (Poissonova ili normalna aproksimacija)

- Za određivanje aproksimativne vrijednosti broja e pomoću broja π
- Za analizu kvalitete procjenitelja, itd.

- Povezuje razna poglavlja gradiva matematike
- Na internetu postoje brojni simulatori ovog pokusa pa se on lako može virtualno "izvesti" u velikom broju ponavljanja.
- Dopušta razne analize i diskusije pogreške u aproksimaciji (npr. ovisnosti o omjeru duljine igle i udaljenosti između pravaca, itd.)....

Projektni zadatak:

Procjena vjerojatnosti pojavljivanja događaja.

Zadatak:

Analizirati ponašanje relativne frekvencije kao procjenitelja za vjerojatnost pojavljivanja događaja u ovisnosti o broju ponavljanja pokusa.

Smjernice za izradu projektnog zadatka:

1. Proučiti u priloženoj literaturi Buffonov pokus.
2. Izraditi potrebnu opremu za izvođenje Buffonovog pokusa.
3. Izvesti formulu za vjerojatnost da igla presjeće pravac u ovisnosti o duljini igle i udaljenosti između pravaca. Odrediti tu vjerojatnost za vaš pokus.
4. Izvoditi pokus 200 puta (u serijama od 10 bacanja) i u excel tablicu bilježiti vrijednosti dvije varijable: broj bacanja i broj presjeka.

5. Za svaki $n \in \{10k, k = 1, \dots, 20\}$ odredite broj pojavljivanja događaja "igla je presjekla pravac" u prvih n ponavljanja pokusa - f_n (f_n je frekvencija događaja "igla je presjekla pravac").
6. Za svaki $n \in \{10k, k = 1, \dots, 20\}$ odredite relativnu frekvenciju tog događaja: $\frac{f_n}{n}$, tj. procjenu za vjerojatnost pojavljivanja događaja.
7. Grafički prikažite vrijednosti procjene u ovisnosti o broju ponavljanja pokusa.
8. Diskutirajte razlike između teorijske vrijednosti i dobivenih procjena.

9. Iskoristite simulator Buffonovog pokusa na internetskoj stranici

<http://mste.illinois.edu/reese/buffon/bufjava.html>.

Ponovite pokus tisuću puta (pazite na omjer duljine igle i udaljenosti paralelnih pravaca!!!) te ponovite postupak i analize.

10. Diskutirajte kako ovisi kvaliteta procjenitelja o broju ponavljanja pokusa.

11. Pripremite prezentaciju pokusa, rezultata i zaključaka u trajanju od 10 minuta.

Projektni zadatak:

Binomna slučajna varijabla

Zadatak:

Analizirati distribuciju binomne slučajne varijable $X \sim \mathfrak{B}(n, p)$ za vrijednost p oko polovine i za malu vrijednost p teorijski i eksperimentalno.

Smjernice za izradu projektnog zadatka

1. Izvedite 50 puta Buffonov pokus bacajući 20 šibica istovremeno izabirući razmak između pravaca u odnosu na duljinu šibice tako da osigurate vrijednost p oko polovine.
2. Ista bacanja možete iskoristiti i za analizu binomne distribucije pri maloj vjerojatnosti uspjeha ako uspjehom smatrate događaj "glava šibice je pala na pravac".
3. Odredite histogram teorijske distribucije i histogram empirijske distribucije za svaki pojedini slučaj. Usporedite i diskutirajte.

4. Usporedite očekivanje binomne slučajne varijable s obilježjima histograma.
5. Možete li zaključiti kakav bi bio oblik histograma ako je vrijednost parametra p bliska jedinici. Obrazložite tvrdnju.

Projektni zadatak:

Binomna slučajna varijabla i Poissonova aproksimacija

Zadatak:

Analizirati distribuciju binomne slučajne varijable $\mathfrak{B}(n, p)$ za malu vrijednost p teorijski i eksperimentalno i usporedite s Poissonovom distribucijom s parametrom $\lambda = np$.

Smjernice za izradu projektnog zadatka

1. Izvedite 40 puta Buffonov pokus bacajući 20 šibica istovremeno. U svakom izvođenju pokusa bilježite koliko puta je "glava" šibice

pala na pravic. Odredite empirijsku distribuciju i prikažite je histogramom.

2. Odredite teorijski vjerojatnost pojavljivanja događaja "glava šibice je pala na pravic" koristeći teoriju Buffonovog pokusa i teorijsku distribuciju pripadne binomne slučajne varijable. Prikažite je histogramom.
3. Izračunajte pripadne vjerojatnosti za Poissonovu distribuciju s $\lambda = np$ za realizacije $k \in \{0, \dots, 20\}$. Prikažite ih histogramom.
4. Usporedite i diskutirajte sličnosti i razlike ovako dobivenih histograma.