Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
06.09.2011.

1. [**10 bod.**] Neka su dani skupovi E, F, $G \subseteq X$. Dokažite da vrijedi sljedeća jednakost:

$$(E\backslash F) \cup (F\backslash E) \cup (F\backslash G) \cup (G\backslash F) = (E \cup F \cup G)\backslash(E \cap F \cap G)\,.$$

2. (a) [**5 bod.**] Neka je $X = \{7, 8, 9, 10\}$. Nađite trivijalne σ–algebre na skupu X, te barem dvije σ–algebre koje nisu trivijalne.

   (b) [**5 bod.**] Neka je $\mathcal{M}$ monotona klasa na X. Dokažite da je tada i $B \cap \mathcal{M} = \{B \cap M : M \in \mathcal{M}\}$ monotona klasa.

3. [**10 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor mjere i $B \in \mathcal{A}$. Pokažite da je i $(B, \mathcal{A}_{|B}, \nu_{|B})$ prostor mjere, ako je $\mathcal{A}_{|B} = \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$ I $\nu_{|B}(A) = \nu(A \cap B)$, $A \in \mathcal{A}$.

4. [**10 bod.**] Neka je ν^* aditivna vanjska mjera na skupu X, tj. vrijedi

$$\nu^*(A \cup B) = \nu^*(A) + \nu^*(B)\,,$$

   za svaka dva disjunktna skupa $A, B \subseteq X$. Dokažite da je ν^* mjera.

5. [**15 bod.**] Neka je skup $A \subseteq \mathbb{R}$ λ^*–izmjeriv i neka je $\lambda^*(A) < \infty$, pri čemu je λ^* Lebesgueova vanjska mjera. Dokažite da tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji otvoren skup $A \subseteq U$ tako da je $\lambda^*(U\backslash A) < \infty$.

6. (a) [**5 bod.**] Konstruirajte otvoren i neomeđen skup u $\mathbb{R}$, sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom.

   (b) [**10 bod.**] Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgueov skup za koji je $\lambda(A) > 0$. Pokažite da za svaki $\beta \in (0, 1)$ postoji otvoren interval O tako da je $\lambda(A \cap O) \geq \beta\lambda(O)$.

7. [**10 bod.**] Dokažite ili opovrgnite: Svaka σ–algebra na X je ujedno i Dynkinova klasa i π–sistem.

8. (a) [**5 bod.**] Neka je dana funkcija

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{ako je } x < 0, \\ 1 + x, & \text{ako je } x \geq 0 \end{cases}$$

   Ispitajte da li su Lebesgueova i Lebesgue–Stieltjesova mjera jednčlanog skupa $\{0\}$ jednake.

   (b) [**15 bod.**] Neka je $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \mathbb{R}$, te $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ i $A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Ako je

$$\mu_F = \mu_F(A \cap A_1) + \mu_F(A \cap A_2) + \mu_F(A \cap A_3),\ \forall\, A \in \mathbb{R}\,,$$

   gdje je μ_F Lebesgue–Stieltjesova mjera, dokažite da je skup A_2 μ_F–izmjeriv.

Dragana Jankov