Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
17.06.2011.

1. [**20 bod.**] Dokažite da je skup X konačan ako i samo ako postoji surjekcija $f : \mathbb{N}_k \to X$, gdje je $k \in \mathbb{N}$ i skup $\mathbb{N}_k$ se sastoji od prvih k prirodnih brojeva.

2. Neka je $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ i $t > 0$ realan broj.
   (a) [**10 bod.**] Dokažite da je $\mathcal{F}_t := \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : tB \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ σ–algebra na $\mathbb{R}$.
   (b) [**10 bod.**] Dokažite da je $tA = \{ta : a \in A\}$ Borelov skup.

3. (a) [**10 bod.**] Neka je $(X, 2^X, \mu)$ prostor mjere. Za mjeru μ kažemo da je 0–1 mjera na X ako je $\mu(2^x) = \{0, 1\}$, $\mu(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in X$, te $\mu(X) = 1$. Ispitajte da li postoji 0–1 mjera na $\mathbb{N}$.
   (b) [**10 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor mjere, te neka je mjera $\nu^* : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana formulom
   $$\nu^*(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A,\, B \in \mathcal{A} \,\&\, \nu(B) < \infty\}.$$
   Ako je ν σ–konačna mjera, dokažite da je tada $\nu^* = \nu$.

4. (a) [**10 bod.**] Dokažite: Ako su $F, G \subseteq \mathbb{R}$ disjunktni, λ^*–izmjerivi skupovi, onda vrijedi:
   $$\lambda^*\left(A \cap (G \cup F)\right) = \lambda^*(A \cap G) + \lambda^*(A \cap F),\ \forall A \subseteq \mathbb{R}\,.$$
   (b) [**10 bod.**] Konstruirajte otvoren, neomeđen i putevima povezan skup u $\mathbb{R}^n$, sa strogo pozitivnom i konačnom Lebesgueovom mjerom.

5. (a) [**10 bod.**] Dokažite da je svaka σ–algebra na X, ujedno i Dynkinova klasa i π–sistem.
   (b) [**10 bod.**] Neka su μ i ν mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ takve da vrijedi $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$, te neka je familija $\mathcal{C} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R},\, a \leq b\}$ π–sistem, a familija $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mu(B) = \nu(B)\}$ Dynkinova klasa. Ako je $\mu\left((a, b)\right) = \nu\left((a, b)\right)$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$, dokažite da je tada $\mu(B) = \nu(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Dragana Jankov