Pismeni ispit iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
10.02.2011.

1. Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor. Dokažite ili opovrgnite:
   a) [**10 bod.**] Ako je $D \subseteq X$, onda je $D \cap \mathcal{A} = \{D \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ $\sigma-$algebra (na skupu D).
   b) [**10 bod.**] Ako je $f : X \to Y$ funkcija, onda je $\Sigma = \{C \subseteq Y : f^{-1}(C) \in \mathcal{A}\}$ $\sigma-$algebra na Y.
2. [**20 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \nu)$ prostor mjere, te neka je funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definirana s
$$\mu(A) = \sup\{\nu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathcal{A},\ \nu(B) < \infty\}.$$
   Dokažite da je μ mjera na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{A})$.
3. Neka je $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X i neka su $A, E, F \subseteq X$.
   (a) [**15 bod.**] Neka je (E_n) niz μ^*-izmjerivih skupova. Pokažite da je
$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap E_n)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_n).$$
   (b) [**5 bod.**] Ako je $E \subseteq F$, $\mu^*(F \setminus E) = 0$ i E μ^*-izmjeriv, onda je F također μ^*-izmjeriv skup i vrijedi $\mu^*(E) = \mu^*(F)$. Dokažite.
4. [**20 bod.**] Neka je p pravac u ravnini zadan jednadžbom $y = ax + b$, $a \neq 0$. Dokažite da je p Lebesgueove mjere nula.
5. [**20 bod.**] Dokažite da ako zbrojimo Cantorov skup K sa samim sobom, dobivamo segment $[0, 2]$.

Dragana Jankov