2. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
02.02.2011.

1. [**25 bod.**] Neka je $\lambda^\star$ Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$. Dokažite da je $\lambda^\star([a,b]) = b - a$.

2. [**20 bod.**] Neka je p pravac u ravnini zadan jednadžbom $y = ax + b$, $a > 0$. Dokažite da je p Lebesgueove mjere nula.

3. [**15 bod.**] Neka su μ i ν mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ takve da vrijedi $\mu(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}) = 1$. Dokažite da je tada $\mathcal{D} = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \mu(B) = \nu(B)\}$ Dynkinova klasa.

4. [**25 bod.**] Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < -1 \\ 1 + x, & \text{ako je } -1 \leq x < 0 \\ 2 + x^2, & \text{ako je } 0 \leq x < 2 \\ 9, & \text{ako je } x \geq 2 \end{cases} .$$

   Izračunajte mjeru μ_F skupa $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 3x^2 > 2\}$.

5. [**15 bod.**] Definirajte Cantorovu funkciju pomoću niza rastućih i neprekidnih po dijelovima linearnih funkcija.

2. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
02.02.2011.

1. [**25 bod.**] Neka je $\lambda^\star$ Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}^2$. Dokažite da je $\lambda^\star([a,b] \times [c,d]) = (b - a)(d - c)$.

2. [**20 bod.**] Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$ Lebesgueov skup mjere $\lambda(A) > 0$. Pokažite da za svaki $\alpha \in (0,1)$ postoji otvoreni interval I_α takav da je $\lambda(A \cup I_\alpha) \geq \alpha\lambda(I_\alpha)$.

3. [**15 bod.**] Navedite primjer d-sistema koji nije algbra.

4. [**25 bod.**] Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana formulom:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } x < -1 \\ 1 + x, & \text{ako je } -1 \leq x < 0 \\ 2 + x^2, & \text{ako je } 0 \leq x < 2 \\ 9, & \text{ako je } x \geq 2 \end{cases} .$$

   Izračunajte mjeru μ_F skupa $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 4x^2 > 3\}$.

5. [**15 bod.**] Definirati Cantorov skup K. Dokazati da je K potpuno nepovezan te da je $\lambda(K) = 0$.