

1. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
10.12.2010.
Grupa A

- [10 bod.] Pokažite da je skup racionalnih brojeva \mathbb{Q} prebrojiv skup.
Uputa: Iskoristite činjenicu da je prebrojiva unija prebrojiv skupova također prebrojiv skup.
- [15 bod.] Neka je X skup, a $B \subseteq X$. Dokažite: Ako je \mathcal{A} σ -algebra na X , onda je $B \cap \mathcal{A} = \{B \cap A : A \in \mathcal{A}\}$ σ -algebra na B .
- [20 bod.] Dokažite da je formulom $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{7^n} \delta_n$, gdje je δ_n Diracova delta mjera, zadana vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
- [20 bod.] Iskazati i dokazati svojstvo neprekidnosti mjere na uzlazne nizove.
- Neka je $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X .
 - [5 bod.] Definirajte kada je skup $C \subseteq X$ μ^* -izmjeriv.
 - [5 bod.] Dokažite: Ako je $\mu^*(C^c) = 0$, onda je C μ^* -izmjeriv skup.
- [20 bod.] Neka je X bilo koji neprebrojiv skup, te $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ vanjska mjera definirana formulom:

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } A \text{ diskretan} \\ \infty, & \text{u suprotnom} \end{cases}$$

Dokažite da je svaki skup $A \subseteq X$ μ^* -izmjeriv.

- [5 bod.] Iskazati Carathéodoryjev teorem.

1. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
10.12.2010.
Grupa B

- [10 bod.] Neka su A i B prebrojivi skupovi. Pokažite da je skup $A \times B$ prebrojiv.
Uputa: Iskoristite činjenicu da je prebrojiva unija prebrojiv skupova također prebrojiv skup.
- [15 bod.] Neka je $f : X \rightarrow Y$ funkcija, a Σ neka σ -algebra na Y . Dokažite:

$$f^{-1}(\Sigma) = \{f^{-1}(S) : S \in \Sigma\}$$

je σ -algebra na X .

- [20 bod.] Neka su $p, q \in \mathbb{R}$ takvi da je $0 \leq p \leq 1$ i $p + q = 1$. Dokažite da je funkcija $\beta_n : \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$\beta_n(B) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \delta_k(B), \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

vjerojatnosna mjera na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, gdje je δ_n Diracova delta mjera.

- [20 bod.] Iskazati i dokazati svojstvo σ -subaditivnosti mjere.
- Neka je $\mu^* : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X .
 - [5 bod.] Definirajte kada je skup $C \subseteq X$ μ^* -izmjeriv.
 - [5 bod.] Dokažite: Ako je $\mu^*(C) = 0$, onda je C μ^* -izmjeriv skup.
- [20 bod.] Na skupu \mathbb{N} vanjska mjera ν^* je definirana formulom:

$$\nu^*(A) = \begin{cases} \frac{n}{n+1}, & \text{ako } A \text{ ima } n \text{ elemenata} \\ 1, & \text{ako je } A \text{ beskonačan} \end{cases}$$

Pronađite sve ν^* -izmjerive skupove.

- [5 bod.] Iskazati Carathéodoryjev teorem.