1. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
14.12.2011.
Grupa A

1. [**10 bod.**] Navesti primjer algebre koja nije σ-algebra.

2. [**15 bod.**] Neka je $t > 0$ realan broj, $A \subseteq \mathbb{R}$, te $tA = \{ta : a \in A\}$. Dokažite da je $\mathcal{F}_t := \{B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : tB \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$ σ–algebra, te da je Borelova σ–algebra generirana familijom $\mathcal{F}_t$.

3. [**15 bod.**] Dokazati svojstvo σ-subaditivnosti mjere.

4. [**15 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, te $E \in \mathcal{A}$. Pokažite da je formulom

$$\mu_{|E}(A) := \mu(A \cap E),\ \ A \in \mathcal{A}$$

definirana nova mjera na $(X, \mathcal{A})$, koju zovemo *restrikcija mjere* μ *na skup* E.

5. [**20 bod.**] Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, te $E, F \subseteq X$. Dokažite: Ako je $\mu^*(E \triangle F) = 0$, onda je $\mu^*(E) = \mu^*(F)$.

6. [**10 bod.**] Neka je $[a, b] \subseteq \bigcup_{i=1}^n (a_i, b_i)$. Matematičkom indukcijom po n pokazati da je $b - a \leq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

7. [**15 bod.**] Dokazati da je $\lambda^\star([a, b]) = b - a$, gdje je $\lambda^\star$ Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

1. kolokvij iz kolegija
Uvod u teoriju mjere
14.12.2011.
Grupa B

1. [**10 bod.**] Navesti primjer topologije koja nije σ-algebra.

2. [**15 bod.**] Dokažite da je Borelova σ–algebra $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ generirana familijom $\mathcal{K}^d$ svih kompaktnih skupova iz $\mathbb{R}^d$.

3. [**15 bod.**] Dokazati svojstvo neprekidnosti mjere na silazne nizove skupova.

4. [**15 bod.**] Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere, $f : X \to Y$ funkcija, te $\Sigma = \{B \subseteq Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ σ–algebra na Y. Dokažite da je funkcija $\mu' : \Sigma \to [0, \infty]$, definirana formulom

$$\mu'(B) := \mu(f^{-1}(B)),\ \ B \in \Sigma$$

mjera na (Y, Σ), koju zovemo *slika mjere* μ *po funkciji* f.

5. [**20 bod.**] Neka je $\mu^\star : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X, te $E, F \subseteq X$. Dokažite: Ako je $E \subseteq F$, $\mu^*(F \backslash E) = 0$ i E je μ^*–izmjeriv skup, onda je F također μ^*–izmjeriv skup i vrijedi $\mu^*(F) = \mu^*(E)$.

6. [**10 bod.**] Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ i $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Pokazati da je $(A \cap B) + \mathbf{x} = (A + \mathbf{x}) \cap (B + \mathbf{x})$.

7. [**15 bod.**] Dokazati da je interval $(-\infty, b]$ Lebesgueov skup.