Povijest matematike II

Franka Miriam Brückler

23. srpnja 2009.

Sadržaj

Predgovor

U Zagrebu 2009.

Franka Miriam Brückler

Poglavlje 1

Razvoj matematičke analize

1.1 Prethodnici infinitezimalnog računa

Počeci infinitezimalnog računa mogu se naći u antičkoj Grčkoj: Zenon iz Eleje je svojim paradoksima u 5. st. pr. Kr. prvi razmatrao pitanja beskonačno malih veličina, a Eudoksova metoda ekshaustije (4. st. pr. Kr.) bila je rani, vrlo precizan oblik integralnog računa. Koristeći metodu ekshaustije, Arhimed je oko 225. g. pr. Kr. izračunao površinu segmenta parabole upisujući u nju trokute (čije površine je zbrajao i tako ujedno dobio prvi primjer konvergentnog reda) te površinu kruga upisujući mu pravilne poligone. Tom je metodom izračunao i niz drugih površina i volumena.

Do 17. stoljeća u ovom području nije ostvaren napredak. U to doba problemi iz mehanike potaknuli su matematičare na rješavanje problema poput određivanja težišta tijela. Početkom 17. stoljeća Luca Valerio (1552. - 1618.) grčkim metodama računao je površine segmenata parabole, a **Johannes Kepler** (1571. - 1630.) je za potrebe izračunavanja površine segmenta elipse razvio vlastitu grubu metodu integriranja u kojoj površinu zamišlja kao zbroj dužina. Njegova je metoda bitno nepreciznija od grčkih. Do godine 1615. Kepler je svojom metodom izračunao volumene i oplošja niza različitih rotacionih tijela.

Prvi stvarno novi doprinos integriranju dao je isusovac **Bonaventura Francesco Cavalieri** (1598. -1647.) koji je na temelju Keplerove metode integriranja došao do svoje metode nedjeljivih (*indivisibilibus*) veličina, objavljene u djelu *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635.). Ni njegova metoda nije sasvim precizno izvedena i kasnije ju je kritizirao Huygens, tvrdeći da bi metoda trebala biti takva da bar uvjerava da se dokaz dade rigorozno izvesti (Huygens je bitno utjecao na Leibniza). Cavalierijeva ideja bila je da se dužina sastoji od beskonačno mnogo

Slika 1.1: Bonaventura Francesco Cavalieri, 17. st.

točaka (svaka bez duljine), a geometrijski lik od beskonačno mnogo dužina (svaka bez širine i površine). Primjerice, ako treba naći površinu pravokutnog trokuta, neka mu se jedna kateta sastoji od n točaka (*indivisibiles*), a druga od njih na. Tada je svakoj od točaka na prvoj kateti vertikalno odgovara po jedna točka hipotenuze i te visine („ordinate") su redom a, $2a$, $\ldots$, na. Stoga cijela površina sadrži $a+2a+...+na = a\frac{n(n+1)}{2}$ točaka. Kako je n jako velik, možemo zanemariti 1 u brojniku te je površina $\frac{an^2}{2}$ tj. pola produkta duljina kateta. Iako je zaključak točan, očigledna je neegzaktnost pristupa. Tom je metodom Cavalieri izračunao površinu ispod krivulja $y = x^n$ od $x = 0$ do $x = 1$ (tj. određeni integral[1] $\int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x$) za više različitih $n \in \mathbb{N}$ i dobio točan rezultat da ta površina iznosi $\frac{1}{n+1}$.

Sličnim se problemima rigoroznije bavio **Gilles Personne de Roberval** (1602. -1675.) koji je površinu promatrao kao zbroj površina beskonačno mnogo tankih pravokutnika, što je primijenio na površinu ispod krivulje $y = x^n$ od 0 do 1 i dobio $\frac{0^n+1^n+2^n+...+(k-1)^n}{k^{n+1}}$. Utvrdio je da se ta vrijednost za jako velike k približava prema $\frac{1}{n+1}$ i tako preciznijom metodom dobio isti rezultat kao Cavalieri.

Pierre de Fermat (1601. - 1665.) jedan je od najvažnijih neposrednih prethodnika uspostave infinitezimalnog računa. De Fermat je generalizirao parabolu $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^2$ na $\left(\frac{y}{a}\right)^m = \left(\frac{x}{b}\right)^n$ te hiperbolu $\frac{y}{a} = \frac{b}{x}$ na $\left(\frac{y}{a}\right)^m = \left(\frac{b}{x}\right)^n$ i računao odgovarajuće površine. Generalizirao je Cavalierijeve metode računanja površine ispod krivulja $y = x^n$ na $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$ (za $n = -1$ u to je doba općenito poznato da površina ispod krivulje odgovara prirodnom logaritmu). S druge strane, de Fermat se bavio i problemima minimuma i maksimuma te određivanja tangente na krivulju te je zbog svojih otkrića došao u sukob s Descartesom, koji je također razvio jednu metodu određivanja normala i tangenti. De Fermatova metoda određivanja tangente se u biti svodi na današnju, samo bez deriviranja. Zbog tih je rezultata Lagrange

[1] Naziv određeni integral potječe od Laplacea, a naziv neodređeni integral od S.-F. Lacroixa (1765. - 1843.).

smatrao de Fermata ocem diferencijalnog računa. De Fermatova metoda određivanja maksimuma svodi se na zamjenu varijable x s malo većom $x+E$ te izjednačavanjem polazne i nove ovisnosti, te kraćenjem članova s E. Opisat ćemo tu metodu na primjeru: na dužini duljine a tražimo točku takvu da je umnožak njenih udaljenosti do oba kraja dužine maksimalan. Označimo li s x udaljenost tražene točke do jednog kraja, udaljenost do drugog je $a-x$. Funkcija čiji maksimum se traži određena je formulom $f(x) = x(a-x)$ (s domenom $[0,a]$). De Fermatova metoda je kako slijedi:

$$x(a-x) = (x+E)(a-(x+E)),$$

$$ax - x^2 = ax - x^2 - Ex + Ea - Ex - E^2,$$

$$E^2 + 2Ex = aE,$$

iz čega dijeljenjem s E (malen, ali nije nula) dobijemo

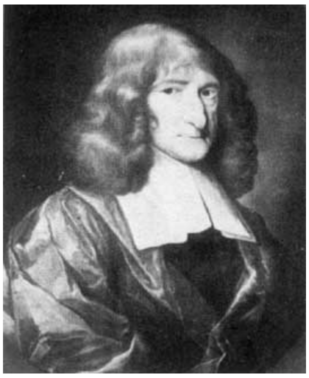
$$E + 2x = a.$$

Kako je $E \approx 0$, de Fermat zaključuje da je rješenje problema $x = \frac{a}{2}$ tj. da je tražena točka polovište dužine. Primijetimo da se ovdje radi o eksplicitnom određivanju stacionarne točke funkcije tj. o traženju x takvog da je $\lim\limits_{E\to 0} \dfrac{f(x+E)-f(x)}{E} = 0$. De Fermat svoje radove nije objavljivao, no mnogi matematičari su bili upoznati s njima jer je bio jedan od mnogih koji su komunicirali s opatom Marinom Mersenneom. Mersenne je kao i de Fermat poznatiji po svojim zaslugama za razvoj teorije brojeva te će u odgovarajućem poglavlju biti više riječi o njima.

U prvoj polovini 17. stoljeća niz matematičara je razvilo vlastite metode određivanja tangente (de Beaune, Hudde idr.). Pascal se pak bavio određivanjem površina vezanih za cikloidu[2] i pri tom *de facto* koristio pravilo parcijalne integracije. **Evangelista Torricelli** (1608. -1647.) je odredio površinu ispod cikloide i položaj težišta te površine. Pomoću svoje varijante infinitezimalnih metoda riješio je i problem kojeg je postavio de Fermat (poznat kao „Fermatov problem"): trebalo je naći točku u trokutu čiji zbroj udaljenosti do vrhova je minimalan. Ta se točka danas zove Fermatova ili Torricellijeva točka trokuta. Torricelli je dokazao i da rotacija dijela hiperbole $y = 1/x$ od $x = 0$ do neke točke $x = a$ oko y-osi određuje tijelo konačnog volumena. Drugim riječima: pokazao je da nepravi integral $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ konvergira. Bavio se i problemima kretanja promjenjivom brzinom i vezom brzine i puta, kao i

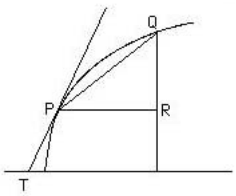
[2] Cikloida je kirvulja određena kao putanja točke na rubu kružnog kotača koji se kotrlja po pravcu.

(a)



(b)

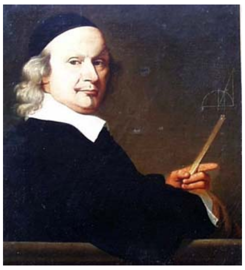
Slika 1.2: Evangelista Torricelli i Isaac Barrow, 17. st.



Slika 1.3: Barrowov diferencijalni trokut.

Isaac Barrow (1630. - 1667.). Obojica su uočili da se brzina može odrediti iz puta i obrnuto. Tako se počela razvijati svijest o međusobnoj inverznosti deriviranja i integriranja. Barrow je dao i metodu za određivanje tangente na krivulju u kojoj tangentu promatra kao graničnu vrijednost sekanti kojima se krajevi međusobno približavaju; ta je metoda poznata kao Barrowov diferencijalni trokut (vidi sliku 1.3).

John Wallis (1616. - 1703.) je bio najutjecajniji engleski matematičar prije Newtona, profesor geometrije na Oxfordu, a bavio se kriptografijom (za vrijeme građanskog rata dešifriravao je rojalističke poruke) i poviješću matematike. Iz grupe znanstvenika s kojima se redovno sastajao ubrzo je nastalo društvo *Royal Society*, a sudjelovao je i u razvitku metode za podučavanje gluhonijemih osoba. Osim matematikom bavio se i teologijom, filozofijom, engleskom gramatikom i logikom. Proučavao je Cavalierijeve, Keplerove, Robervalove, Torricellijeve i Descartesove metode te na osnovu njih razvio preciznije metode koje su neposredni prethodnici modernog integralnog računa. U svom glavnom matematičkom djelu *Arithmetica infinito-*



Slika 1.4: John Wallis, 17. st.

rum (1656.) izračunao je $\int_0^1 (1-x^2)^n \mathrm{d}x$ za $n \in \mathbb{N}$ na temelju Cavalierijeve metode. Pokušavajući tu površinu izračunati za $n = \frac{1}{2}$ razvio je jednu metodu interpolacije (taj pojam je upravo on prvi koristio), koju će kasnije Newton iskoristiti za svoj opći binomni teorem. U spomenutom se djelu bez dokaza nalazi i formula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots} = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{2i}{2i+1} \right)^2 .$$

Wallis je uveo znak ∞ u djelu *De sectionibus conicis* (1655.).

Tako je do šezdesetih godina 17. stoljeća stvoren niz radova o problemu tangenti, mjerenju duljine krivulja, izračunavanja površina i volumena koji stvaraju „kritičnu masa" iz koje će Newton i von Leibniz stvoriti infinitezimalni račun, tj. analizu beskonačno malih veličina.

1.2 Leibniz i Newton

Neovisno jedan o drugom, krajem 17. stoljeća moderni infinitezimalni račun, tj. deriviranje, integriranje i njihovu međusobnu inverznost, otkrili su **Isaac Newton** i **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Iako ekvivalentni, njihovi su rezultati i notacijski i pojmovno različiti. Zasluga obojice je da su dotad odvojeno razmatrane probleme deriviranja (određivanja tangente) i integriranja (određivanja površine) povezali i uočili njihovu međusobnu inverznost, koja se izražava osnovnim teoremom infinitezimalnog računa (Newton-Leibnizovom formulom). Dodatna zasluga te dvojice velikih znanstvenika je što su za obje operacije razvili odgovarajuće algoritamske tehnike.

Isaac Newton (1642. - 1727.) je godine 1671. napisao tekst *De Methodis Serierum et Fluxionum* o **fluksijama**. Iako je objavljeno više od 60 godina kasnije, to djelo imalo velik utjecaj na niz matematičara koji su ga

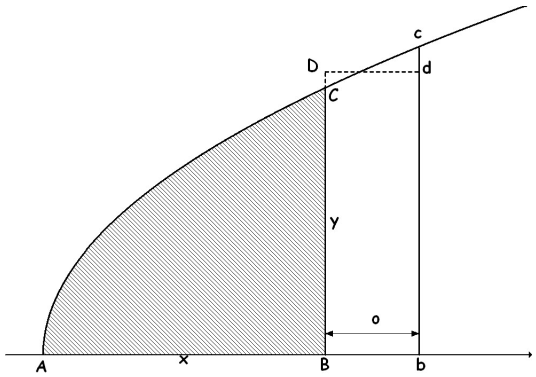
(a) (b)

Slika 1.5: Sir Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz, 17./18. st.

imali prilike vidjeti. U osnovi, radi se o određivanju brzine iz puta i obrnuto, a najveća je Newtonova zasluga da je uočio međusobnu inverznost te dvije operacije. Newton zamišlja česticu koja se giba po krivulji u pravokutnom koordinatnom sustavu, a njene brzine (horizontalnu $\dot{x}$ i vetikalnu $\dot{y}$) zove fluksijama tekućih veličina (fluensa) x i y, pridruženim fluksu (toku) vremena. Ukoliko je putanja opisana krivuljom $f(x, y) = 0$, onda je $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ koeficijent smjera tangente na tu putanju. Za određivanje brzine tj. tangente koristi Barrowovu ideju o tangenti kao limesu sekanti. Inverzni problem se sastoji u određivanju ordinate y iz poznavanja veze između apscise x i omjera vertikalne i horizontalne brzine $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Taj je problem Newton također riješio (koristeći razvoje funkcija u redove potencija) i tako uz deriviranje otkrio i antideriviranje tj. neodređeni integral i njihovu međusobnu inverznost (**osnovni teorem infnitezimalnog računa**). Uočio je i da se antideriviranjem mogu odrediti površine te da su problemi površine, volumena i duljine luka istovrsni. Vezu između fluksija i kvadrature pokazao je u prilogu svog djela o optici iz 1704.

Kako su izdavači Barrowovih djela bankrotirali, u to doba teško se objavljuju matematički rezultati te je Newton imao dosta problema s njihovim objavljivanjem i većina djela su objavljena puno kasnije nego su napisana. Prvi objavljeni rad o fluksijama, *Method of fluxions and infinite series*, napisao je 1671., a objavljen je 1736. na engleskom i puno kasnije na latinskom. Svoje oznake je dosta mijenjao, ali najčešće su $\dot{x}$ za $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, x' za antiderivaciju od x, o za $\mathrm{d}t$ i $\dot{x}o$ za $\mathrm{d}x$ (takve oznake koristi primjerice u tekstovima iz 1692.).

Newtonovo objašnjenje općeg postupka za nalaženje odnosa između površine ispod krivulje i njene ordinate (dakle, veze između integrala i derivacije) opisat ćemo na primjeru. Recimo da se radi o krivulji u $x - y$-ravnini i neka



Slika 1.6: Računanje derivacije Newtonovom metodom.

je sa z označena površina ispod krivulje (koja je cijela iznad x osi i prolazi kroz ishodište) u nekim granicama od $x = 0$ do x. Primjerice, neka je je $z^2 = \frac{4}{9}x^3$. Pomaknemo li desnu granicu za mali iznos o, površina se povećala i postoji pravokutnik s bazom $o = |Bb|$ i visinom $v = |bd|$ čija površina je jednaka povećanju površine (vidi sliku 1.7). Tada je $(z + ov)^2 = \frac{4}{9}(x + o)^3$ iz čega slijedi $2zov + ov^2 = \frac{4}{9}(3x^2 + 3xo + o^2)$. Ako je o „beskonačno mali", onda je $v \approx y$ pa je $2zy \approx \frac{4}{3}x^2$ odnosno $y \approx \sqrt{x}$ (tj. $z = \int x^{1/2}\mathrm{d}x$). Iz postupka je vidljivo da se radi o računanju derivacije z po varijabli x, a vidi se i inverznost integriranja i deriviranja. Ovakvim je načinom Newton analizirao niz krivulja i tako dobio prvu tablicu integrala.

Kao što smo vidjeli, ključni korak u Newtonovom pristupu deriviranju i integriranju je dodavanje malog prirasta o varijabli x i pripadnog malog prirasta ov površini z, a zatim poništavanje prirasta o te prijelaz s v na y. Očigledna je i srodnost s de Fermatovim pristupom. Newton je ovu metodu koristio i u diskusijama ekstrema, tangenti i zakrivljenosti krivulja. U kasnijim radovima reformulirao je svoje argumente u terminima fluenta i fluksija.

Omjere fluksija (koeficijent smjera tangente na krivulju), Newton nalazi na sličan način. Takjo primjerice za krivulju

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

promjena x u $x + o\dot{x}$ i y u $y + o\dot{y}$ daje

$$(x^3 - ax^2 + axy - y^3)+$$

$$+o(3x^2\dot{x}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-2ax\dot{x}-2ao\dot{x}^2+ax\dot{y}+ay\dot{x}+ao\dot{x}\dot{y}-3y^2\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3) = 0.$$

Uzevši u obzir jednadžbu krivulje slijedi

$$o(3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3y^2\dot{y}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-2ao\dot{x}^2+ao\dot{x}\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3)=0,$$

iz čega dijeljenjem s $o \neq 0$ dobivamo

$$3x^2\dot{x}-2ax\dot{x}+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3y^2\dot{y}+3xo\dot{x}^2+o^2\dot{x}^3-2ao\dot{x}^2+ao\dot{x}\dot{y}-3yo\dot{y}^2-o^2\dot{y}^3=0.$$

Zanemarujući članove s o jer su vrlo mali dobivamo

$$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{y}x+a\dot{x}y-3\dot{y}y^2=0$$

te je

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{3x^2-2ax+ay}{3y^2-ax}.$$

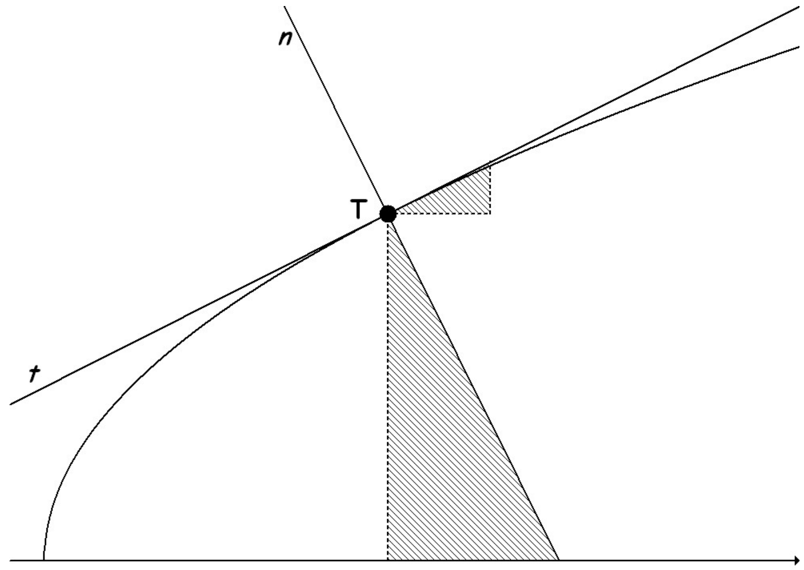
Već su Newtonovi suvremenici primijetili nedostatke ovog pristupa: dodaju se prirasti koji su skoro nula, ali nisu nula, i tokom istog računa nekad se tretiraju kao brojevi koji nisu nula (kad s njima dijelimo), a nekad kao nula (kad neke članove s njima zanemarujemo). Jedan od najpoznatijih kritičara infinitezimalnih veličina kako ih je prestavio Newton bio je **biskup George Berkeley**, koji je postavio niz pitanja vezanih za logičku opravdanost Newtonovog pristupa. Temeljem takvih pitanja nastavak razvoja teorije derivacija i integrala bit će usmjeren na opravdanje rezultata koji očigledno funkcioniraju. To će biti postignuto tek početkom 19. stoljeća, kad su egzaktno definirani limesi.

Isaac Newton rođen je nakon smrti oca, a kad je imao tri godine, majka mu se ponovno udala (za pastora Barnabusa Smitha) te sina ostavila na brizi kod svoje majke. Newton nije volio poočima i u jednom zapisu svojih grijeha prije devetneste godine života navodi da je *prijetio tati i mami Smith da će zapaliti njih i kuću u kojoj su.* Nakon što je drugi put ostala udovicom 1659., njegova majka želi da Newton postane farmer. Newton je mrzio takav posao, a učitelj škole koju je dotad pohađao uvjerio je njegovu majku da mu dopusti završetak školovanja. Newton je studirao na *Trinity College* u Cambridgeu i malo se zna o njegovom studiju osim da se temeljito upoznao s raznim filozofskim djelima. Tokom studija otkrio je interes za matematiku. Diplomirao je 1665., a godinu kasnije *Trinity College* je zatvoren zbog epidemije kuge. U dvije godine koje se zbog toga morao povući u Woolsthorpe razradio je svoje revolucionarne nove teorije o infinitezimalnom računu, optici i zakonu gravitacije. Kasnije se vratio u Cambridge, postao profesorom matematike na *Trinity College*, nastavio se baviti fizikom i matematikom... Godine 1672., nakon što im je donirao teleskop, postaje članom *Royal Society.* U to doba, nakon objave rada o svjetlosti i bojama, ulazi u sukob s Robertom Hookeom.

Nakon još nekih sukoba oko znanstvenih rezultata, Newton je doživio slom živaca 1678. Godinu dana kasnije umrla mu je majka i nakon toga je Newton postajao sve povučeniji. Godine 1687. objavio je svoje najznačajnije djelo *Philosophiae naturalis principia mathematica*, poznato jednostavno kao *Principia*, u kojem detaljno opisuje svoje nove fizikalne teorije s njihovim primjenama na astronomiju. U tom djelu objavljen je znameniti Newtonom zakon univerzalne gravitacije (svaka dva objekta privlače se međusobno silom proporcionalnom produktu njihovih masa i obrnuto proporcionalnom kvadratu razmaka među njima). Nakon što je 1685. kao kralj Velike Britanije izabran James II, koji je bio katolik, došlo je do mnogih političko-vjerskih sukoba. Među inim, kralj je na sve slobodne ugledne pozicije, uključujući sveučilišne, postavljao katolike. Newton je kao uvjereni protestant stao na suprotnu stranu i ušao u politiku, buneći se protiv takvog popunjavanja slobodnih mjesta na sveučilištu u Cambridgeu. Izabran je kao predstavnik sveučilišta u Cambridgeu u parlamentu. Nakon drugog sloma živaca 1693. Newton se povukao iz znanosti. Postoje mnoge teorije o uzroku tog sloma, no gotovo je sigurno da je Newton bolovao od depresije. Ostatak života se više bavio politikom te je postigao više visokih političkih pozicija i postao vrlo bogat. Od 1703. do smrti bio je predsjednik *Royal Society*. Vitezom (sir Isaac Newton) postao je 1705. i tako je postao prvi znanstvenik s tom titulom. Zadnji period Newtonovog života obilježen je najpoznatijim matematičkim sukobom: sukobom Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. - 1716.) poznat je osobito kao filozof. Već s 14 godina upisao je studij (mlad, ali ne posebno mlad za ono doba). Studij je uključivao filozofiju, retoriku, matematiku, latinski, grčki i hebrejski. Nakon diplome, odlučio se za dalji studij prava. Habilitacijom se kvalificirao za profesora filozofije. Bavio se i alkemijom, iako najvjerojatnije samo teorijski. Mnogo je putovao, a na jednom putovanju upoznao je baruna von Boineburga koji je postao njegov patron te Leibniz prelazi u njegovu službu. U to doba bavi se svojom zamisli o „univerzalnoj enciklopediji", a kasnije i politikom. Prilikom putovanja u Pariz 1672. upoznao se s Christiaanom Huygensom te je pod njegovim vodstvom bitno napredovao u znanju matematike. Po povratku iz Pariza već je imao prve rezultate o infinitezimalnom računu. Godinu kasnije posjetio je i London i postao članom *Royal Society*; moguće je da je tom prilikom vidio Newtonove rukopise. Osim po infinitezimalnom računu, u matematici je poznat i po jednom mehaničkom kalkulatoru, osnovama binarne aritmetike te začecima ideja o determinantama.

Za razliku od Newtonovih rezultata pisanih, za današnje shvaćanje, vrlo nejasno, Leibnizov stil pisanja bio je mnogo sličniji suvremenom matematičkom zapisu. Leibniz je zbog svoje želje da stvori univerzalni simbolički jezik



Slika 1.7: Karakteristični trokut.

puno pažnje posvećivao notaciji. Njemu zahvaljujemo i za izraze „diferencijalni i integralni račun" i za oznake $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ i $\int y\,\mathrm{d}x$. Uz želju da dobije formalne metode za infinitezimalni račun, motivaciju za svoje rezultate našao je i u razmatranju nizova diferencija i Pascalova[3] karakterističnog trokuta. Karakteristični trokut je trokut kojeg u nekoj točki T krivulje zatvaraju tangenta te horizontala povučena u T i vertikala povučena u nekoj točki krivulje koja je bliska točki T. On je sličan trokutu kojeg za danu točku T određuju njena ordinata, odsječak normale između T i osi apscisa te dobiveni odsječak na osi apscisa. Taj je trokut Leibniz iskoristio za nalaženje raznih relacija među površinama tj. raznih formula za integriranje.

Huygens je 1672. Leibnizu postavio zadatak beskonačne sumacije recipročnih vrijednosti trokutnih brojeva[4]:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots=?$$

Leibniz je uočio da se članovi reda mogu zapisati u obliku

$$\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$$

[3]Više autora, ne samo Pascal, uočilo je karakteristični trokut, no Leibniz ga je upoznao preko jednog Pascalova djela.

[4]Trokutni brojevi su prirodni brojevi oblika $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

pa sumacija poprima oblik

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{2}{n(n+1)}+\ldots=2-\frac{2}{2}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}+\ldots$$

te je svaki konačni početni dio te sume (parcijalna suma) jednak

$$2-\frac{2}{n+1}.$$

Iz toga Leibniz zaključuje da je suma reda jednaka 2. S obzirom na to da je ključna ideja bila zapisati član reda kao diferenciju dva susjedna člana nekog niza, Leibniz se počeo baviti sumama nizova i njihovih diferencija tj. ako je dan niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, te ako je pripadni niz diferencija definiran s $d_n = a_{n+1} - a_n$, onda je

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}.$$

Tako je Leibniz uočio međusobnu inverznost formiranja niza diferencija i niza suma.

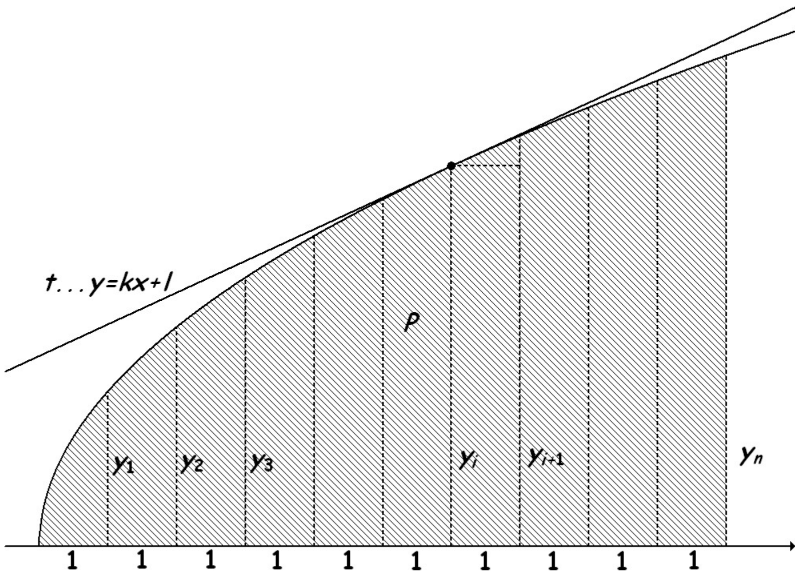
Promatrajući problem određivanja površine ispod krivulje uočio je dalje da vrijedi: ako na krivulji odredimo točke s jednako udaljenim apscisam (razmak apscisa neka je 1), one definiraju niz ordinata $y_1, y_2, \ldots, y_n$ i suma tih ordinata aproksimira površinu ispod krivulje, a diferencija dviju susjednih ordinata aproksimira nagib tangente u odgovarajućoj točki krivulje. Što je odabrana jedinica 1 manja, to će te aproksimacije biti točnije. U slučaju beskonačno male jedinice aproksimacija će postati egzaktna te su određivanje površine i određivanje nagiba tangente međusobno inverzne operacije.

U rukopisima iz 1675. Leibniz koristi Cavalierijev simbol *omn.* (*omnes lineae*) za površinu tj. integral. Tako primjerice s $omn.w$ označava sumu svih w (integral), a $omn.\overline{omn.w}$ je suma sumâ w-ova (dvostruki integral). No, iste godine je uveo znak[5] $\int$ kojeg i danas koristimo, koji se nakon diskusija s Johannom Bernoullijem definitivno ustaljuje u njegovim djelima od 1691. (Johann Bernoulli se zalagao za simbol I i naziv *calculus integralis*, a Leibniz za $\int$ i *calculus summatoris*; dogovorili su se kompromisno za Leibnizov simbol i Bernoullijev naziv). Tako primjerice piše

$$\int xl = x\int l - \int\int l.$$

Očigledno se radi o formuli parcijalne integracije. Leibniz uočava i homogenost dimenzija: $\int l$ (ako su l dužine) daje površinu, a $\int xl$ volumen.

[5]Simbol $\int_a^b$ za određene integrale uveo je Jean Baptiste Joseph Fourier u 19. stoljeću.



Slika 1.8: Leibnizova ideja inverznosti deriviranja i integriranja: $k \approx y_{i+1} - y_i$, $P \approx y_1 + \ldots + y_n$.

Tako gornja formula jedan volumen prikazuje kao razliku dva volumena. Tako primjećuje i dimenzijsku homogenost u formulama $\int x = x^2/2$ i $\int x^2 = x^3/3$.

Leibniz uvodi i simbol d za diferenciranje. Uvođenje posebnog simbola argumentira inverznošću integriranja (sumiranja) i deriviranja (diferenciranja). Kako mu je cilj izgraditi račun za sumacije, a taj problem je kompliciraniji, nada se uvođenjem računa za diferenciranje steći uvid u račun suma. Kao što $\int$ povećava dimenziju, d ju smanjuje. U prvoj varijanti piše $1/\mathrm{d}$ za d (upravo jer diferencija površine treba biti dužina smisleno bi bilo pisati $\frac{ya}{\mathrm{d}}$), no ubrzo prelazi na jednostavniji zapis s d (u spomenutom primjeru: na $\mathrm{d}(ya)$). Od tada interpretira $\int$ i d kao simbole bez dimenzije. Dosta vremena je koristio zapise poput $\int x$, no naposlijetku je uočio da je zapis $\int x\,\mathrm{d}x$ konzistentniji te tako Leibnizu dugujemo današnji način zapisa integrala i mnoge osnovne formule integriranja.

U ostalom njegove su ideje u mnogočemu slične Newtonovim. Tako umjesto Newtonovog malog prirasta o i ov koristi infinitezimalne priraste $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$. Kod Leibniza stoga nagib tangente nije omjer brzina nego omjer infinitezimalnih prirasta $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Primjerice, za funkciju $y = x^2$ imamo $y + \mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x)^2 = x^2 + 2x\,\mathrm{d}x + (\mathrm{d}y)^2$ tj. $\mathrm{d}y = (2x + \mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$ te je nagib tangente na tu parabolu $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x + \mathrm{d}x$ odnosno uz zanemarivanje $\mathrm{d}x$ jer je beskonačno malen imamo nagib tangente $2x$.

Obzirom na značaj koji je Leibniz pridavao simbolici i prikladnim terminima nije začuđujuće da mu uz znakove $\int$ i d zahvaljujemo i za neke druge danas korištene oznake i nazive. Tako je upravo Leibniz uveo pojam transcendentnih brojeva, a za množenje koristi točku i za dijeljenje dvotočku. Obje oznake pojavljivale su se i ranije, no nisu bili korišteni u smislu aritmetičkih operacija.

Za kraj ovog poglavlja naravno treba reći nešto o sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkriću infinitezimalnog računa. Kako je vidljivo iz prethodnog, Newtonovi rezultati su nešto stariji, no nisu objavljivani dosta vremene. Leibnizovi rezultati sežu u doba postojanja neobjavljenih Newtonovih rezultata o infinitezimalnom računu. Leibnizovi prvi objavljeni rezultati su iz godine 1684., Newton je svoje prvi put objavio 1687. Moguće je da je odgovarajuće Newtonove rukopise Leibniz vidio prilikom svog posjeta Londonu, no prilično je izvjesno da ih tad još nije bio u stanju u potpunosti razumjeti. Uz to, iako ekvivalentan, Leibnizov koncept je i notacijski i konceptualno dosta drugačiji od Newtonovog: Leibniz problemima pristupa više geometrijski, dok je Newtonov pristup više fizikalan. Stoga je opravdano obojicu smatrati podjednako zaslužnim. Newton je još 1676. pisao Leibnizu, no pismo je dugo putovalo. U tom pismu Newton je naveo mnoge svoje rezultate, no bez opisa metode. Iako je Leibniz odgovorio odmah po primitku, Newton je pomislio kako je Leibniz namjerno otezao s odgovorom. S druge strane, Leibnizu je pismo zasigurno ukazalo na potrebu da čim prije objavi svoje rezultate. Newton je još jednom pisao Leibnizu iste godine, no ovo pismo je još dulje putovalo (preko pola godine). To je pismo sročeno pristojno, no s očiglednim uvjerenjem da je Leibniz ukrao Newtonove metode. U svom odgovoru Leibniz je opisao neke detalje svojih metoda, na što je Newton odgovorio da Leibniz nije riješio nijedan od ranije neriješenih problema. To je doduše točno, no Leibnizov formalni pristup kasnije se pokazao temeljem daljeg razvoja matematičke analize. U to doba Leibniz je postao knjižničar i dvorski savjetnik vojvode od Hannovera i, do na česta putovanja, ostatak života je proveo u Hannoveru. Leibniz se tada bavio i nizom tehničkih projekata, dinamikom i geologijom te je postavio hipotezu da je Zemlja u početku bila u rastaljenom stanju. U ovom razdoblju Leibniz je razvio i temelje binarne aritmetike te temelje teorije determinanti. Naravno, nastavio se baviti i filozofijom te je objavio više filozofskih djela. Komunicirao je s više od 600 znanstvenika u Europi. Godina 1684. i 1686. objavio je radove u kojima detaljno opisuje svoj diferencijalni i integralni račun. Newton je pak godinu kasnije objavio svoju *Principia*, no metoda fluksija (zapisana 1671.) zbog problema s objavljivanjem objavljena je tek 1736. Godine 1711. Leibniz je pročitao članak Johna Keilla u *Transactions of the Royal Society of London* u kojem ga Keill optužuje za plagijat. Leibniz je zatražio povlačenje i naveo da za račun fluksija nije znao dok nije pročitao Wallisova djela, no Keill uzvraća spominjanjem Newtonovih dvaju pisama te navodi da je iz njih Leibniz mogao iščitati Newtonove rezultate. Leibniz se na to pismom obratio društvu *Royal Society* s molbom da isprave nepravdu koju su mu nanijele Keillove tvrdnje. Kao odgovor na to pismo, društvo *Royal Society* je postavilo komisiju koja je trebala utvrditi prvenstvo u otkriću infinitezimalnog računa. Pritom Leibniz nije bio upitan za vlastitu verziju događaja, a komisijin izvještaj (u korist Newtona, naravno) napisao je sam Newton. Taj je izvještaj objavljen 1713., a Leibniz je saznao za njega iz pisma koje mu je uputio Johann Bernoulli. Leibniz je na to objavio anonimni pamflet naslova *Charta volans* u kojem u svoju korist navodi jednu Newtonovu grešku vezanu za više derivacije, koju je uočio Johann Bernoulli. Na taj pamflet odgovorio je ponovno Keill, a Leibniz je odbio raspravljati s njime, rekavši da ne može odgovarati idiotu. Nešto kasnije pisao mu je Newton, kojem je odgovorio s detaljnim opisom svojih otkrića. Rasprava o prvenstvu nastavljena je i nakon Leibnizove smrti 1716. S vremenom je više-manje prihvaćena ideja podjednake zasluge obojice.

1.3 Razvoj teorije redova potencija

Beskonačne sumacije pojavljuju se još u grčkoj antici, primjerice u Zenonovim paradoksima. Poznato je i da je Oresme u 14. stoljeću znao da harmonijski red divergira. U isto doba u Indiji je Madhava imao ideju koju bismo danas zvali razvojem funkcije u red potencija te je primjerice dobio ono što danas zovemo Maclaurinovim redom za arkus tangens (a i za neke druge funkcije). Ipak, sve do modernog doba beskonačno sumiranje nije potpuno precizirano.

Njemački matematičar[6] **Nicolaus Mercator** (1620. - 1687.) poznat je po razvoju $\ln(1+x)$ u red. On je (1668.) izračunao površinu ispod krivulje $y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ kao

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

i tako otkrio prvi razvoj neke funkcije u red potencija. Time je Mercator postao začetnik teorije redova. Ovaj red se danas ponekad zove Mercatorov red. Verižnim razlomcima i izračunavanjem logaritama pomoću redova bavio se irski matematičar **William Brouncker** (1620. - 1683.), koji je Wallisov

[6] Nicolausa Mercatora ne valja miješati s njegovim prezimenjakom Gerardom Mercatorom, matematičarem iz 16. stoljeća koji je poznat po rezultatima u kartografiji.

Slika 1.9: James Gregory, 17. st.

izraz za π preoblikovao (1655.) u verižni razlomak

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \dots}}}.$$

Brouncker je jedan od prvih koji su se bavili pitanjem konvergencije reda, iako još ne u današnjem smislu. Bio je osnivač i prvi predsjednik *Royal Society*.

Škotski matematičar **James Gregory** (1638. -1675.) razlikuje konvergentne i divergentne redove i također spada u neposredne prethodnike teorije redova potencija i infinitezimalnog računa. Wallisovom metodom dobiva Gregoryjev red

$$x = \mathrm{tg} x - \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} + \frac{\mathrm{tg}^5 x}{5} \dots$$

tj. $\mathrm{arctg}\, x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, dakle Maclaurinov red za arkus tangens. Za $x = \frac{\pi}{4}$ dobiva $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$. Gregory prvi koristi konvergentne redove za računanje površine kruga i hiperbole, a dobio je i niz drugih zanimljivih rezultata pokušavajući pokazati transcendentnost brojeva e i π. Najkasnije 1668. znao je razvoje za sinus, kosinus i tangens u red potencija, a oko 1670. i binomni red (koji je kasnije dobio i Newton). Gregory je tako više od četrdeset godina prije Taylora otkrio Taylorove redove, a dao je i jedan od prvih kriterija konvergencije reda i definiciju integrala gotovo tako općenitu kao Riemannovu. No, Gregory je bio nedovoljno prihvaćen te je umro relativno nepoznat od moždanog udara u dobi od 36 godina.

Sir Isaac Newton se redovima bavio već u svom radu iz 1669. u kojem je postavio teoriju fluksija. U tom radu on se beskonačnim redovima potencija bavi na sličan način kao i s konačnim (tj. polinomima). Newton je, bez dokaza, dao i binomni teorem za racionalne eksponente, te ga je koristio za razvoje funkcija u redove potencija, koje je pak koristio za računanje integrala (integriranjem član po član). Sjetimo se, binomni red u općem obliku glasi:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x|<1.$$

Pomoću binomnog reda Newton je dobio razvoj u red za sinus i kosinus, arkus sinus te eksponencijalnu funkciju. Newton, kao i ostali suvremenici, ne razmatra pitanje konvergencije reda potencija. Do binomnog teorema za racionalne eksponente došao je računajući površinu kruga $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ tj. vezano za Wallisov pokušaj računanja $\int_0^1 (1-x^2)^{1/2}\,\mathrm{d}x$. Ideja je sljedeća: krivulja $y=(1-x^2)^0$ ima površinu x (pod površinom ispod krivulje ovdje mislimo na onu omeđenu vertikalam $x=0$ i x). Za $y=(1-x^2)^1$ dobije se površina $x-x^3/3$, za $y=(1-x^2)^2$ površina $x-2x^3/3+x^5/5$ itd. Promatrajući koeficijente u izrazima za površine (za eksponente $n=1,2,3,\ldots$) primijetio je pravilnost: nazivnici su 1; 1,3; 1,3,5; 1,3,5,7; itd. (dakle, nazivnici su uzastopni neparni brojevi), a brojnici alterniraju po predznaku i do na predznak su 1; 1,1; 1,2,1; 1,3,3,1; itd. (dakle, brojnici su brojevi iz Pascalova trokuta[7]). Stoga je po analogiji uzeo da za eksponent $n=1/2$ površina može zapisati kao $x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{x^5}{5}-\frac{1}{16}\cdot\frac{x^7}{7}-\ldots$ te deriviranjem član po član dobiva

$$(1-x^2)^{1/2} = 1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{16}-\ldots.$$

Točnost računa provjerio je tako da je desnu stranu gornjeg izraza pomnožio samu sa sobom i dobio $1-x^2$. Newton je redove osim za integriranje koristio i za aproksimativno rješavanje jednadžbi.

Kako smo vidjeli, Leibniz je upravo preko proučavanja redova došao do ideje integriranja. Vidjeli smo kako je izračunao da je suma svih recipročnih trokutnih brojeva jednaka 2. Redove potencija koristio je za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Deriviranjem jednadžbe jedinične kružnice $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ po $x=\cos\theta$ dobio je $\mathrm{d}\theta = -\frac{1}{\sin\theta}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ te primjenom Newtonova binomnog teorema za eksponent $-1/2$ i integriranjem član po član dobio razvoj arkus sinusa:

$$\arcsin x = x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots.$$

Taj rezultat dobio je i Newton. Zatim je koristio metodu koju su nezavisno jedan od drugog obojica razvili, a to je kako znajući razvoj u red potencija za neku funkciju dobiti red potencija njene inverzne funkcije. Tako je dobio red za sinus, a njegovim deriviranjem i razvoj kosinusa u red potencija (za

[7] O Pascalovom trokutu bit će više riječi u poglavlju o vjerojatnosti.

(a) (b)

Slika 1.10: Brook Taylor i Colin Maclaurin, 18. st.

više detalja vidi [13]). Leibnizu dugujemo i Leibnizov kriterij konvergencije alternirajućeg reda (red $\sum_n (-1)^n a_n$ sa svim $a_n \geq 0$ konvergira ako niz (a_n) monotono pada i teži u nulu).

Spomenutim rezultatima Newton i Leibniz su postavili temelje teorije Taylorovih redova. Oni su dobili ime po engleskom matematičaru **Brooku Tayloru** (1685. - 1731.). Osim matematičkom analizom, Taylor se bavio i geometrijom i slikarstvom (napisao je dvije knjige o perspektivi) te magnetizmom i termometrima. Iako su srodne rezultate dobili ranije i Gregory, Johann Bernoulli, Newton i Leibniz, red oblika

$$f(a) + f'(a)x + \frac{f'(a)}{2}x^2 + \dots$$

pridružen funkciji f (koji je uz određene uvjete jednak $f(a+x)$) dobio je ime po Tayloru, u čijem djelu *Methodus in crementorum directa et inversa* (1715.) je objavljen. Važnost Taylorovog reda uočio je tek šezdesetak godina kasnije Lagrange kad je pokušavao egzaktnije definirati pojam derivacije. Taylor je također bio jedan od prvih matematičara koji su uočili da diferencijalne jednadžbe mogu imati singularna rješenja (rješenja koja se ne mogu dobiti uvrštavanjem nikojih vrijednosti za konstante u općem rješenju). Drugi poznati matematičar tog doba koji se bavio aproksimacijama funkcija putem redova bio je škotski matematičar **Colin Maclaurin** (1698. - 1746.). Iako poznatiji po Maclaurinovom redu, njegova veća zasluga je što je objavio prvi sistematski prikaz *Treatise of fluxions* (1742.) Newtonovih rezultata kao odgovor na prigovore poput Berkeleyevog. Ne radi se samo o pokušaju rigoroznijeg pristupa infinitezimalnom računu, veći i o djelu s mnogo primjena tog računa. Maclaurinov red je Taylorov red funkcije za razvoj oko nule, no iako se s njime bavio, Maclaurin ga nije otkrio. Maclaurinovi redovi se pojavljuju u *Treatise of fluxions* i Maclaurin tu navodi i Taylorove doprinose. Maclaurin je prvi ili bar jedan od prvih matematičara koji su otkrili integralni kriterij konvergencije reda. Također je čini se prvi koji je koristio naziv binomni teorem.

Euler je prvi uočio, iako nije dao precizan dokaz, da je

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Uočio je važnost pitanja konvergencije reda, iako nije uvijek pazio na to. I on je razvoje funkcija u redove potencija koristio je za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Euler je upravo temeljem razvoja eksponencijalne funkcije u red potencija uočio njenu vezu sa funkcijama sinus i kosinus, danas poznatu kao **Eulerova formula**

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Euler razmatrajući eksponencijalnu funkciju a^x zaključuje ovako: ako je $a > 1$ te ω „beskonačno malen broj ili razlomak tako malen da je skoro nula” (dakle, $\omega \approx 0$, $\omega \neq 0$), onda je

$$a^\omega = 1 + \psi$$

za neki beskonačno malen ψ. Neka je $\psi = k\omega$ gdje k ovisi samo o a. Tada je

$$a^\omega = 1 + k\omega$$

tj. $\omega = \log_a(1 + k\omega)$. Ako to potenciramo na eksponent $t \in \mathbb{R}$ te primijenimo binomni razvoj dobije se

$$a^{t\omega} = (1 + k\omega)^t = 1 + \frac{t}{1}k\omega + \frac{t(t-1)}{1\cdot 2t}tk^2\omega^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1\cdot 2t\cdot 3t}t^2k^3\omega^3 + \ldots$$

Uzmemo li sad da je t beskonačno velik, možemo smatrati da je $\frac{t-1}{t} = \frac{t-2}{t} = \ldots = 1$ pa uz $z = t\omega$ imamo

$$a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{2!} + \frac{k^3z^3}{3!} + \ldots$$

Primijetio je da prirodni logaritam odnosno eksponencijalnu funkciju s bazom prirodnog logaritma dobivamo kad je $k = 1$. Izračunao je vrijednost odgovarajućeg a na 23 decimale i označio ga današnjom oznakom e. Dalje Euler navodi: budući je

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

(a)

(b)

Slika 1.11: Jacob i Johann Bernoulli, 17./18. st.

slijedi da je[8]

$$(\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = 1.$$

Stoga je

$$(\cos y \pm i \sin y)(\cos z \pm i \sin z) = \cos(y + z) \pm i \sin(y + z).$$

Iz toga slijedi de Moivreova formula

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos(nz) + i \sin(nz).$$

Razvijemo li njenu lijevu stranu prema binomnom teoremu dobivamo izraze za $\cos(nz)$ i $\sin(nz)$. Uzmemo li da je n beskonačno velik, onda u izrazu $nz = v \in \mathbb{R}$ mora biti z beskonačno mali pa je $\cos z = 1$, $\sin z = z$. Nakon toga sličnim postupkom kao za eksponencijalnu funkciju dobiva razvoje za $\cos v$ i $\sin v$.

1.4 Formalizacija infinitezimalnog računa

Braća **Jacob i Johann Bernoulli** (1654. - 1705. odnosno 1667. - 1748.) neposredni su nastavljači Leibnizovog djela. Oba su komunicirali s Leibnizom, osobito Johann koji je zaslužan za naziv integriranja. Oba Bernoullija su se bavili diferencijalnim jednadžbama i redovima. Po Jacobu je nazvana

[8] U doba ovog zapisa u *Introductio in analysin infinitorum* još je pisao $\sqrt{-1}$ za i, no kako je kasnije upravo Euler uveo oznaku i, pisat ćemo s tom jednostavnijom oznakom.

Bernoullijeva diferencijalna jednadžba $y' = p(x)y + q(x)y^n$, koju je riješio 1696. Johann je poznat po uvođenju pojma separacije varijabli.

Braća Bernoulli bili su prva od tri generacije obitelji Bernoulli, koja je dala nekoliko velikih matematičara (uz spomenuta dva brata najpoznatiji je Daniel Bernoulli, Johannov sin). Oba brata su po želji oca, koji nije dopustio studij matematike, studirala druge predmete: Jacob Bernoulli teologiju i filozofiju, a Johann medicinu. Oba su tokom studija svoje interese usmjerili prema matematici. Mlađi, Johann, je matematiku naučio uz pomoć starijeg brata Jacoba. Oba su brata postala poznati i uspjeŽni matematičari. Jacob je osobito poznat po rezultatima iz teorije vjerojatnosti, kojoj je upravo on dao moderni oblik. Johanna je više zanimala matematička analiza, odnosno posljedice Leibnizovog diferencijalnog i integralnog računa. Godine 1691. Johann je riješio problem koji je postavio Jacob o nalaženju formule krivulje lančanice, tj. kosinusa hiperbolnog. U to doba dva brata intenzivno surađuju i dobivaju niz važnih rezultata, no uskoro će od suradnika postati rivali. Dok je Jacob imao mjesto na sveučilištu u Baselu, Johann ga nije uspijevao dobiti te je morao tražiti drugo namještenje. Johann se hvalio svojim rezultatima, a Jacob ga je grubo napao u tisku i tvrdio kako ga je on svemu naučio. Kako su oba brata bila vrlo osjetljiva, razdražljiva i željna priznanja, sukob se ubrzo pojačao. Budući da nije mogao dobiti mjesto u Baselu, Johann je odselio u Nizozemsku (otkud i potječe obitelj Bernoulli).

Godine 1692. Johann je u Parizu susreo Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpitala (1661. - 1704.) i podučio ga Newton-Leibnizovom infinitezimalnom računu. Na osnovi tih predavanja 1696. de l'Hôpital je objavio prvi udžbenik infinitezimalnog računa, ali bez spomena Johanna Bernoullija (osim u zahvali u predgovoru). U toj se knjizi nalazi pravilo, danas poznato kao **l'Hôpitalovo pravilo**, koje olakšava izračunavanje mnogih limesa. To je pravilo zapravo otkrio Johann i dio je njegovih predavanja l'Hôpitalu. Ipak, l'Hôpital nije bio loš matematičar koji je samo „ukrao” tuđe rezultate, već je u svojoj knjizi ispravio više Johannovih grešaka.

Oba su se brata Bernoulli i problemima varijacijskog računa, koji predstavljaju početak danas vrlo razvijene matematičke discipline funkcionalne analize. Tipičan problem varijacijskog računa je **problem brahistohrone**, kojeg je postavio Johann Bernoulli 1696.: Za dane točke A i B u vertikalnoj ravnini treba odrediti krivulju po kojoj točka, kojoj akceleraciju uzrokuje samo gravitacija, najbrže dolazi od A do B. Tim se problemom ranije bavio i Galileo i dobio krivo rješenje da je ta krivulja luk kružnice. Johann je znao riješiti problem, ali ga je 1696. postavio kao izazov drugim matematičarima. Tako je dobiveno pet rješenja - uz Johanna, problem su riješili i Jacob, te Newton, Leibniz i de l'Hôpital. Rješenje problema brahistohrone je krivulja cikloida. Kad je Jacob 1697. riješio problem brahistohrone, Johann je to

Slika 1.12: Leonhard Euler, 18. st. (slika sa švicarske nočanice od 10 franaka).

pozdravio lijepim riječima, no došlo je do velike svađe u kojoj je Jacob izazvao Johanna novim problemom sličnog tipa. Johann je riješio i taj problem, a svađa je eskalirala te iste godine Johann i Jacob potpuno prekidaju komunikaciju. Johann se u Švicarsku vratio nakon Jacobove smrti i naslijedio njegovo profesorsko mjesto na sveučilištu u Baselu.

U osamnaestom stoljeću više znamenitih matematičara dalo je velike rezultate u infinitezimalnom računu. Tu osobito treba istaknuti Eulera, d'Alemberta i Lagrangea. U to doba se počinje i kristalizirati pojam funkcije. Oresme je u 14. stoljeću grafički prikazivao promjenjive veličine nanoseći jednu horizontalno, a drugu vertikalno, no on ne spominje ovisnost jedne o drugoj. Iz formulacija se vidi i da je koncept funkcije bio donekle jasan još Galileu i Descartesu, no pojam funkcije je zapravo relativno modernan matematički pojam. Taj pojam prvi su koristili Leibniz i Johann Bernoulli u svom dopisivanju. Bernoulli u jednom svom pismu Leibnizu kaže da je funkcija *veličina koja je na neki način formirana iz neodređenih i konstantnih veličina*, a u jednom svom djelu piše i o *funkcijama ordinata*. Leibniz je bio suglasan s takvom upotrebom jer je i sam slično shvaćao taj pojam.

Prvi koji je pojam funkcije postavio kao centralni matematički pojam bio je švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707. - 1783.). U *Introductio in analysin infinitorum* (1748.) funkciju definira ovako: *Funkcija varijabilne veličine je analitički izraz koji je na bilo kakav način sastavljen od te varijabilne veličine i brojeva ili konstantnih veličina.* Nije definirao što misli pod „analitički izraz", već je podrazumijevao da će čitatelj shvatiti da se radi o izrazu formiranom pomoću uobičajenih matematičkih operacija. Euler je prvi tvrdio da je matematička analiza područje koje se bavi analitičkim izrazima i posebno funkcijama.

Funkcije je razvrstao po raznim kriterijima, primjerice na algebarske i transcendentne. Euler je dozvoljavao da se u njegovim analitičkim izrazima operacije pojavljuju i beskonačno mnogo put, te koristi redove, beskonačne produkte i verižne razlomke. Predložio je da se transcendentne funkcije proučavaju preko njihovog razvoja u red, s tim što ne tvrdi da je takav razvoj uvijek moguć, već kaže da ga treba dokazati za svaki pojedinačni slučaj. Najveći problem s njegovim pojmom funkcije, iz današnje perspektive, je što ne razlikuje funkciju od njenog zapisa formulom. Ipak, tek od njegovog djela *Introductio in analysin infinitorum* trigonometrijske funkcije više nisu duljine vezane za trokute i kružnicu, već funkcije. U tom djelu spominje i neprekdine funkcije i funkcije s prekidima, no u značenju drugačijem od suvremenog – Eulerove neprekidne funkcije su one koje se mogu predstaviti samo jednim analitičkim izrazom, dakle donekle bi se mogle shvatiti kao ono što danas zovemo elementarnim funkcijama.

Euler je bio jedan od prvih matematičara koji su se bavili parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a smatra se začetnikom opće teorije diferencijalnih jednadžbi. Uveo je beta- i gama-funkciju (poznate i kao Eulerovi integrali), metodu Eulerovog multiplikatora u rješavanju diferencijalnih jednadžbi, ... Prvi je koji se bavio pitanjem ekstremâ funkcija više varijabli. Na osnovi rezultata braće Bernoulli o problemu brahistohrone razvio je varijacijski račun. Poznat je i po tome što je uveo matematičke oznake i za imaginarnu jedinicu, e za bazu prirodnog logaritma i $f(x)$ za formule funkcija.

Leonhard Euler zasigurno je jedan od najznamenitijih matematičara u povijesti. Doprinijeo je mnogim matematičkim disciplinama, a i fizici. Matematici ga je podučio Johann Bernoulli, a Johann je i uvjerio Eulerovog oca da dopusti sinu studij matematike (Eulerov otac je bio protestantski svećenik i želio je da i sin krene njegovim stopama). Euler je studirao u Baselu i s devetnaest godina je već objavio prvi znanstveni rad. Nakon što je 1726. umro Nicolaus (II) Bernoulli, Johannov sin koji je bio zaposlen u St. Petersburgu, Euleru je ponuđeno njegovo mjesto. Euler u St. Petersburg dolazi 1727. Ispočetka je uz akademski posao radio i za rusku mornaricu, sve dok 1730. nije postao profesor fizike. Kad je St. Petersburg napustio Daniel Bernoulli, Euler je dobio i profesuru matematike. Tako je do 1734. postao dobro situiran te se i oženio. Imao je trinaestero djece, ali samo petero je preživjelo djetinjstvo. Sâm Euler je kasnije tvrdio da je svoje najveće matematičke rezultate dobio dok je držao dijete u naručju i dok su se druga djeca igrala oko njega. Nakon groznice koju je preživio 1735. Eulerovo zdravlje ostalo je slabo, tri godine kasnije počeo je imati probleme s vidom. Godine 1741. odlazi u Berlin, gdje je proveo 25 godina života. U tom razdoblju je napisao 380 članaka (Euler jedan od naproduktivnijih matematičara u povijesti). Godine 1766. vratio se

Slika 1.13: Jean d'Alembert, 18. st.

u St. Petersburg, a ubrzo iza toga je gotovo potpuno oslijepio. 1771. dom mu je izgorio u požaru, a Euler je uspio spasiti samo sebe i svoje matematičke rukopise. Uskoro nakon tog je potpuno oslijepio, a zanimljivo je da je gotovo pola svih svojih rezultata ostvario u tom razdoblju potpune sljepoće. Tu su mu osobito, i to ne samo u zapisivanju, pomogla dva njegova sina. Na sam dan smrti još je podučavao matematici svog unuka i bavio se proračunima kretanja dva balona. Njegova djela objavljivana su još pedeset godina iza njegove smrti.

Jean le Rond d'Alembert (1717. - 1783.) se ponajviše bavio diferencijalnim jednadžbama (običnim i parcijalnim) i njihovom primjenom u fizici. Za matematičku analizu je posebno zaslužan jer je jedan od prvih koji je pokušao postići jasnoću u pojmu limesa i derivacije. Derivaciju je definirao kao limes kvocijenta prirastâ, no pojam limesa ipak nije razjasnio. Izrazio je sumnju u korištenje nekonvergentnih redova, a razvio je i po njemu nazvani kriterij konvergencije reda.

D'Alembertov otac Louis-Camus Destouches bio je artiljerijski oficir, a majka je bila Madame de Tencin, biša časna sestra koja je od pape dobila dozvolu razrješenja zaređenja. Imala je niz ljubavnih afera i sudjelovala u mnoštvu političkih intriga. Kad se rodio Jean, otac je bio izvan države, a majka je novorođenće ostavila na stepenicama pariške crkve St Jean Le Rond. Dijete je brzo nađeno i odvedeno u dom za djecu bez doma te je kršeno kao Jean Le Rond, po imenu crkve pred kojom je nađeno. Kad se otac vratio u Pariz, kontaktirao je sina i pobrinuo se da se za njega brine žena jednog staklara, Madame Rousseau, koju je d'Alembert uvijek doživljavao kao svoju majku jer ga prava majka nikad nikad priznala kao sina, a kod gospođe Rousseau je živio sve do srednjih godina. Otac mu se pobrinuo za obrazovanje i ostavio mu dovoljno novca da ne bude u problemima (otac mu je umro kad je d'Alembert imao 9 godina). Očeva rodbina se nastavila brinuti za njegovo

Slika 1.14: Joseph Louis Lagrange, 18./19. st.

obrazovanje te je upisan u jansenističku[9] školu *College des Quatre Nations*. Upisao se kao Jean-Baptiste Daremberg, no ubrzo je promijenio ime u Jean d'Alembert. U toj školi se zainteresirao za matematiku i fiziku. Kad je završio tu školu, odlučio se za pravničku karijeru, no u slobodno vrijeme se nastavio baviti matematikom. Kad je 1738. postao advokat, predomislio se o karijeri i sljedeće godine upisao medicinu, no ni s tim studijem nije bio zadovoljan. Čini se da je jedino što ga je stvarno zanimalo bila matematika i u njoj je neobično brzo napredovao, osobito uzevši u obzir da je bio uglavnom samouk. Od 1739. počeo je objavljivati matematičke znanstvene radove. Život je proveo u Parizu i postigao velik matematički ugled, ali često upetljan u razne sukobe jer je bio sklon svađama sa svima u svojoj okolini, a najpoznatiji su njegovi sukobi s Clairautom[10], Danielom Bernoullijem i Eulerom. Znamenit je i po svojim doprinosima fizici, primjerice po d'Alembertovom principu u mehanici, no d'Alembert je bio matematičar i mehaniku je doživljavao kao područje matematike. Bio je i suizdavač Diderotove *Encyclopédie*, velik dio koje je napisao (gotovo sve matematičke dijelove i mnoge druge). U drugom dijelu života više se bavio književnošću i filozofijom. Nakon više godina slabog zdravlja, umro je od bolesti mjehura. Kao poznati nevjernik pokopan je u neoznačenom grobu.

Znameniti francuski matematičar **Joseph-Louis Lagrange** (1736. - 1813.) zapravo je porijeklom većim dijelom Talijan. Iako Talijan, Lagrange je uvijek bio skloniji francuskom dijelu svog porijekla: pradjed s očeve strane bio je francuski konjički kapetan. Lagrangeova obitelj nije bila bogata jer je otac, zaposlen na relativno visokom činovničkom mjestu, neuspješnim financijskim

[9] Jansenisti su bili struja unutar katoličke crkve koja se protivila isusovcima. Kasnije je proglašena heretičkom.

[10] Alexis Claude Clairaut, 1713. - 1765., francuski matematičar, pokušavao je potvrditi Newtonovo i Huygensovo uvjerenje da je Zemlja spljoštena na polovima. Bavio se i diferencijalnim jednadžbama, od kojih je jedna vrsta danas poznata kao Clairautova diferencijalna jednadžba.

spekulacijama izgubio velike iznose novca. Prema želji oca, Lagrange se počeo školovati za pravnika. Interes za matematiku pokazao je relativno kasno, te se predomislio i odlučio školovati za matematičara. Puno godina kasnije rekao je: *Da sam bio bogat, vjerojatno se ne bih posvetio matematici.* Iako samouk i samo 19 godina star, Lagrange je 1755. dobio mjesto profesora matematike u Kraljevskoj artiljerijskoj školi u Torinu. Njegovi matematički interesi u tom ranijem razdoblju bili su usmjereni na infinitezimalni račun i njegovu primjenu na matematičku fiziku. 1766. je naslijedio Eulera kao direktor matematike na berlinskoj Akademiji znanosti. Iduće godine oženio se rođakinjom, Vittoriom Conti. Nisu imali djece, a u jednom pismu d'Alembertu je naveo da ih nije želio imati. U Berlinu je Lagrange proveo 20 godina i za to vrijeme osvojio više nagrada pariške Akademije znanosti. U kasnijem razdoblju boravka u Berlinu Lagrangeovo je zdravlje, a i zdravlje njegove supruge, bilo slabo. Supruga mu je umrla 1783., a tri godine kasnije umro je i njegov veliki zaštitnik, car Friedrich II. Pozicija u Berlinu za Lagrangea tako nije više bila idealna, a i klima mu nije odgovarala, te je od niza ponuda, većinom za povratak u Italiju, odabrao odlazak u Pariz na mjesto člana Akademije znanosti. U Pariz odlazi 1787. i tu je ostao do kraja svoje karijere. Tu je 1788. objavio i svoje najznamenitije djelo, napisano u Berlinu: *Mécanique analytique*. U tom je djelu sažeo svu mehaniku nakon Newtona i reformulirao ju koristeći diferencijalne jednadžbe. Time je klasična Newtonova mehanika transformirana u više matematičku Lagrangeovu mehaniku.

Poznato je da je Lagrange bez većih nevolja preživio razdoblje Francuske revulucije, vjerojatno zahvaljujući svojoj filozofiji koju je izrazio rečenicom: *Vjerujem da je, općenito, jedan od glavnih principa svakog mudrog čovjeka da se strogo podvrgne zakonima države u kojoj živo, čak i ako su nerazumni.* U tom je razdoblju bio član odbora Akademije znanosti za standardizaciju mjera (1790.), koji se zalagao za metrički sustav i decimalni brojevni sustav. U toj komisiji bilo zahtjeva za korištenjem baze 12, na što je Lagrange ironično zastupao korištenje baze 11. Godine 1792. Lagrange se ponovno oženio, ovaj put s kćeri jednog od kolega s Akademije. Zanimljivo je, bar se tako prenosi u većini izvora, da je ta mlada i lijepa djevojka je bila još *teenager* i zaljubila se u njega, vjerojatno potaknuta njegovom povučenom i pomalo tužnom osobnošću, te da je upravo ona bila ta koja je inzistirala na vjenčanju. Ovaj Lagrangeov brak bio je vrlo sretan, no ni u njemu nije imao djece.

U doba jakobinskog terora, 1793., ukinuta je Akademija, a odbor za standardizaciju mjera bio je jedino tijelo Akademije koje je smjelo nastaviti s radom. Lagrange je postao predsjednik tog odbora, dok su iz istog izbačeni mnogi drugi istaknuti znanstvenici, primjerice Lavoisier i Coulomb. Kemičar Lavoisier je ujesen iste godine intervenirao u korist Lagrangea, kad je vlada zahtijevala hapšenje svih stranaca rođenih u neprijateljskim zemljama i konfiskaciju njihove imovine. Za Lagrangea je napravljen izuzetak, ali je pola godine kasnije, u svibnju 1794., Lavoisiera nakon niti jednodnevnog suđenja revolucionarni sud osudio na smrt. Lagrange mu nije mogao pomoći, a prilikom giljotiniranja Lavoisiera rekao je: *Trebao je samo trenutak da ova glava padne, a neće biti dovoljno ni sto godina da se stvori njoj slična.*

Kad je u prosincu 1794. osnovana znamenita škola *École Polytechnique*, Lagrange je postao prvi profesor matematičke analize na njoj. Iduće godine osnovana je i *École Normale* s ciljem obrazovanja učitelja, a Lagrange je i na njoj predavao. Zanimljivo je da je Lagrange pri prijelazu u Pariz u potpisanom ugovoru imao klauzulu o tome da neće predavati, no revolucionarne vlasti su to izmijenile i zahtijevale da drži nastavu. Njegova predavanja na navedenim školama pohađali su neki kasnije znameniti matematičari, primjerice Fourier, iz čijih zapisa saznajemo da Lagrange nije bio dobar predavač. U ovom kasnijem razdoblju svog života Lagrange je objavio nekoliko djela iz matematičke analize. Napoleon ga je 1808. imenovao u Legiju časti i dao mu titulu grofa Carstva.

Lagrange je, posebno radi potreba fizike, razvio sustavnu teoriju diferencijalnih jednadžbi. Osobito su važni njegovi pokušaji preciziranja pojma derivacije. U tu svrhu pretpostavio je da se svaka funkcija može razviti u Taylorov red te je derivacije definirao preko koeficijenata tog razvoja. Kao osnovnu istakao je relaciju

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + hd$$

koja vrijedi kad su h i d blizu nule. Pomoću nje je dokazao da funkcija s pozitivnom prvom derivacijom u x raste na nekom intervalu oko x, dokazao Lagrangeov teorem srednje vrijednosti, Lagrangeov oblik ostatka Taylorovog reda... Svi njegovi dokazi bili bi točni, no nije opravdao gore navedenu osnovnu relaciju. Zanimljivo je spomenuti da oznake $f'(x), f''(x), \ldots$ za derivacije funkcije dugujemo Lagrangeu.

Početkom devetnaestog stoljeća matematičari su pokazivali sve više interesa za preciznim zasnivanjem infinitezimalnog računa kako bi se otklonili Berkeleyevi i slični prigovori.

Konačnu formalizaciju diferencijalnog računa postigao je **Augustin Louis Cauchy** (1789. - 1857.). Bio je vrlo plodan matematičar i napisao je mnogo djela iz različitih područja matematike (objavio je 789 radova, nadmašili su ga samo Euler i Cayley), no posebno je poznat po sklonosti „zagubljivanju" radova drugih matematičara (primjerice Galoisa) i kasnijem objavljivanju njihovih rezultata pod svojim imenom. Ipak, njegova vlastita zasluga je postavljanje novih mjerila za strogost matematičkog dokaza i postavljanje

Slika 1.15: Augustin Louis Cauchy, 19. st.

općeprihvaćenih temelja matematičke analize dosljednim korištenjem teorije nejednakosti. Upravo njemu zahvaljujemo za suvremene $\varepsilon - \delta$ - formulacije u matematičkoj analizi, s tim da je on suvremene $\varepsilon - \delta$-definicije limesâ izrazio riječima. Ovdje je zgodno napomenuti da je **Bernhard Bolzano** (1781. 1848.) nekoliko godina ranije nego Cauchy (1817.) koristio $\varepsilon - \delta$ - formulacije u pokušaju definiranja neprekidnosti funkcija, no njegov rad nije postao poznat za njegova života. Iako po rezultatima nije bio originalan, Cauchyjeve zasluge za novi okvir matematičke analize su neosporne.

Laplace i Lagrange bili su česti gosti u domu Cauchy-jevih u doba Augustinova djetinjstva, a Lagrange je nagovorio njegova oca da dade solidno matematičko obrazovanje sinu. Pohađao je *École Polytechnique* u Parizu. Prvo zaposlenje mu je bilo vojni inžinjer: 1810. je u Cherbourgu radio na utvrdama i lukama za invaziju Napoleonove flote na Englesku. Kad se 1813. vratio u Pariz, Lagrange i Laplace su ga uvjerili da se posveti matematici. Postao je profesor matematike na raznim visokim školama, među inim i na *École Polytechnique*, te član Akademije znanosti. Usprkos velikom uspjehu i neosporno važnim matematičkim rezultatima, bio je neomiljen među kolegama: arogantan i samodopadan, uz to relativno fanatičan katolik. S druge strane, bio je konzistentan u svojim političkim i vjerskim uvjerenjima: nakon srpanjske revolucije 1830., odbio je dati zakletvu novom režimu i otišao u egzil. Godine 1838. se vratio u Pariz u Akademiju znanosti, no zbog nedavanja zakletve nije mogao dobiti natrag svoje predavačke pozicije. Nakon promjene režima 1848., Cauchyju su vraćene sveučilišne pozicije, no u tom kasnijem razdoblju njegova života intenzivirali su se sukobi s kolegama.

Cauchy je pitanje konvergencije preveo na jezik algebre nejednadžbi. Tako je primjerice već Maclaurin pisao da je suma reda granica njegovih parcijalnih suma, no ta formulacija kod Cauchyja postaje precizna: za svaki $\varepsilon > 0$ može se naći n takav da je za sumu više od n početnih članova reda razlika između ukupne i te sume manja od ε. Iz takve definicije sume reda Cauchy je izveo dokaz konvergencije geometrijskog reda za kvocijente koji su po apsolutnoj vrijednosti manji od 1 i zatim uspoređivanjem drugih redova s geometrijskim dokazao razne kriterije konvergencije.

Cauchy je definirao i **neprekidnost funkcije**: funkcija f je neprekidna na nekom intervalu ako za sve x iz tog intervala $f(x+\alpha)-f(x)$ neograničeno opada s α (prema nuli). Tu je malo neprecizan jer se ovako formulirana definicija može shvatiti i kao definicija obične i kao definicije uniformne neprekidnosti jer nije jednoznačno shvatljiv poredak kvantifikatora. Svoju definiciju neprekidnosti koristio je u dokazu teorema o međuvrijednosti za neprekidne funkcije (ako je funkcija neprekidna na intervalu $[b, c]$ i ako je $f(b) > 0$ i $f(c) < 0$, onda za neki x iz istog intervala vrijedi $f(x) = 0$). U dokazu konstruira nizove koji konvergiraju prema toj nultočki x, s tim da prešutno podrazumijeva potpunost skupa realnih brojeva (kao očiglednu koristi tvrdnju da monoton ograničen niz konvergira).

Derivaciju definira ovako: ako su ε i δ vrlo mali i δ takav da je za sve $h < \delta$ i za svaki promatrani x

$$f'(x) + \varepsilon > \frac{f(x+h) - f(x)}{h} > f'(x) - \varepsilon$$

onda je broj $f'(x)$ derivacija funkcije f u x. Time je opravdao Lagrangeovu osnovnu relaciju i time iz nje izvedene Lagrangeove dokaze (s tim da je Cauchy mnoge od njih pojednostavio). I tako, dok je kod Lagrangea derivacija funkcije koeficijent linearnog člana u Taylorovom razvoju te iz njega izvodi osnovnu relaciju koja je aproksimacija bitna za primjene, Cauchy tu istu relaciju iskorištava za egzaktnu definiciju derivacije. Cauchy se bavio i preciziranjem pojma integrala.

Napomenimo ovdje da Cauchy funkcije još uvijek shvaća kao formule oblika $y = f(x)$ ili $f(x, y) = 0$: godine 1821. dao je sljedeću definiciju funkcije: *Ako su promjenjive veličine tako povezane da kad je zadana vrijednost jedne od njih možemo zaključiti koliko iznose sve ostale, obično se te različite veličine doživljavaju kao izražene preko one jedne od njih, koja se onda zove nezavisnom varijablom, a sve ostale koje su izražene preko nezavisne varijable se zovu funkcijama te varijable.* Nakon te definicije precizirao je razliku između eksplicitno i implicitno zadanih funkcija.

Pojam funkcije pokušao je odvojiti od analitičkih izraza **Jean Baptiste Joseph Fourier** (1768. - 1830.): *Općenito, funkcija $f(x)$ predstavlja slijed vrijednosti ordinata od kojih je svaka proizvoljna. Ako je zadano beskonačno mnogo vrijednosti apscisa x, onda imamo jednako mnogo ordinata $f(x)$. Sve one imaju konkretnu numeričku vrijednost, bilo pozitivnu ili negativnu ili nula. Ne pretpostavljamo da te ordinate podliježu zajedničkom pravilu; one slijede jedna iza druge na bilo kakav način i svaka je dana kao da je jedina.* Ipak, Fourier u svojim dokazima o takvim općim funkcijama pretpostavlja

Slika 1.16: Jean Baptiste Joseph Fourier, 18./19. st.

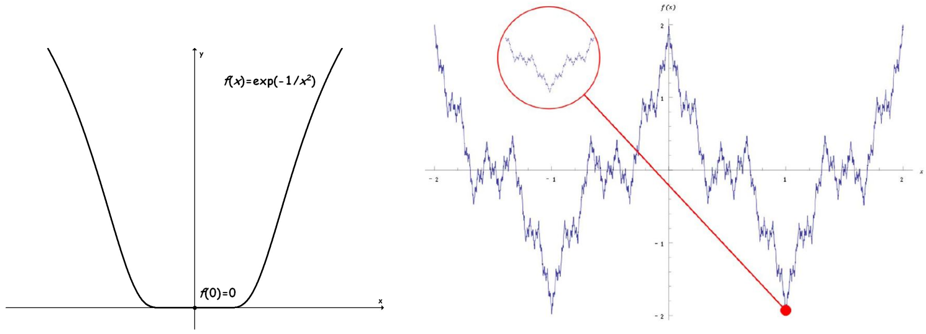
Slika 1.17: Georg Friedrich Bernhard Riemann, 19. st.

da su neprekidne. Fourierovu definiciju je prihvatio **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet Dirichlet** (1805. - 1859,) i temeljem nje definirao neprekidnost funkcije u modernom smislu. Dirichlet je dao i primjer funkcije definirane na intervalu koja ima prekid u svakoj točki intervala. To je **Dirichletova funkcija** $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = 0$ za racionalne i $f(x) = 1$ za iracionalne x.

Vezano za integrale, uz Leibniza i Newtona zasigurno najpoznatije ime je Riemann. **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826. - 1866.) je bio sin luteranskog svećenika, odrastao u skromnim uvjetima i kao prosječan učenik. U doba gimnazije pokazao je interes za matematiku te mu je učitelj dozvolio proučavanje matematičkih tekstova u knjižnici. Po želji oca upisao je studij teologije, no prešao je na studij matematike u Göttingenu. Osnovne kolegije mu je predavao Gauss. Drugi dio studija proveo je u Berlinu gdje su mu predavali Steiner, Jacobi i Dirichlet. Od 1845. bio je docent berlinskog sveučilišta. Riemann se 1862. oženio sestrinom prijateljicom, no već je te jeseni obolio od tuberkuloze. Kraj života je proveo u Italiji, radeći do zadnjeg dana.

Iako je već Cauchy definirao integrale preko integralnih suma[11], tek je

[11] Cauchy je integral funkcije po intervalu definirao kao limes suma $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1}-x_i)$



(a) (b)

Slika 1.18: Cauchyjeva i Weierstrassova funkcija.

Riemann precizno definirao uvjete kad funkcija ima integral tj. kada integralne sume iz Cauchyjeve definicije konvergiraju. Ti uvjeti su danas poznati kao uvjeti **Riemann-integrabilnosti funkcije**. Pronašao je i primjer funkcije koja ima beskonačno mnogo prekida, ali je Riemann-integrabilna: to je funkcija definirana s $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)}{n^2}$, gdje je s $(nx) = nx - m(nx)$ za slučaj da nx nije polovina neparnog broja, a $(nx) = 0$ inače. S $m(nx)$ je označen cijeli broj koji je najbliži broju nx.

U to doba pronađeni su i mnogi drugi „patološki" primjeri funkcija. Još Cauchy je dao primjer neprekidne funkcije kojoj su sve derivacije u nuli jednake nula i kojoj Taylorov red svuda konvergira, ali se podudara s funkcijom samo u nuli ($f(x) = e^{-1/x^2}$ za $n \neq 0$, $f(0) = 0$). Godine 1872. **Karl Theodor Wilhelm Weierstrass** (1815. - 1897.) je dao primjer neprekidne funkcije koja nigdje nije derivabilna koja je danas poznata kao Weierstrassova funkcija (zadana je s $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ uz $0 < a < 1$ i $b \in \mathbb{N}$ neparan takve da je $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$). Kasnije (1885.) je Weierstrass dokazao da je svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu limes uniformno konvergentnog niza polinoma (dakle se može aproksimirati polinomom). Taj teorem je danas poznat kao Stone-Weierstrassov teorem. Obzirom na toliki broj čudnih funkcija, 1889. je **Jules Henri Poincaré** (1854. - 1912.) primijetio: *Ranije, kad je uvedena neka nova funkcija, to je bilo zbog neke praktične potrebe. Danas se funkcije izmišljaju sa svrhom da pokažu da je zaključivanje naših predaka bilo krivo...*

Karl Weierstrass se već u gimnaziji istakao matematičkim sposobnostima. No, po želji oca morao je upisati studij prava, financija i ekonomije u Bonnu. Pateći zbog prisiljenosti na studiji koji ne želi, niti je pohađao predavanja

za neprekidne funkcije f.

Slika 1.19: Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, 19. st.

na tom studiju niti matematička, već je četiri godine života proveo mačujući se i pijući. Ipak, na svoju ruku je proučavao matematička djela i nakon spomenute četiri godine je donio odluku da postane matematičar. Studij u Bonnu je napustio bez da je pristupio ispitima, a oca je jedan obiteljski prijatelj uvjerio da treba dopustiti Karlu studij na teološko-filozofskoj akademiji u Münsteru na kojoj bi mogao položiti ispite propisane za učitelja. Na tom studiju pohađao je mnoga matematički zahtjevna predavanja. Od 1842. radio je kao učitelj matematike, što je u to doba na školama na kojima je predavao podrazumijevalo da predaje i druge predmete, konkretno fiziku, botaniku, zemljopis, povijest, njemački jezik, kaligrafiju i gimnastiku. To razdoblje za njega je bilo iznimno dosadno i naporno jer nije imao s kim raspravljati o „ozbiljnoj" matematici. Od 1850. počeo je patiti od napada jakih vrtoglavica. Ti su napadi trajali dvanaestak godina i smatra se da su posljedica mentalnih konflikata od kojih je patio kao student i stresa zbog korištenja svakog slobodnog trenutka u napornom učiteljskom poslu za matematička istraživanja. Iako je i prije objavio nekoliko radova, poznat postaje člankom *Zur Theorie der Abelschen Functionen* objavljenim u časopisu *Crelle's Journal* 1854. Nakon tog članka dobio je počasni doktorat sveučilišta u Königsbergu i slijedio je niz ponuda za rad na sveučilištima i drugim visokim školama te je 1856. dobio željeno mjesto na berlinskom sveučilištu. Bio je dobar predavač koji je privukao studente iz mnogih krajeva svijeta. Predavao je o nizu tema (o Fourirerovim redovima i integralima s primjenama u matematičkoj fizici, analitičkim funkcijama, o temeljima matematičke analize i integralnom računu, o eliptičkim funkcijama koje su otpočetka bile njegovo glavno područje interesa, ...). Ipak, 1861. je zbog zdravstvenih problema doživio potpuni kolaps od kojeg se oporavljao gotovu punu godinu dana. Kasnije je uvijek predavao sjedeći, a po ploči bi za to vrijeme pisao neki student. Napadi vrtoglavice su 1860-ih prestali, no tad je počeo patiti od problema s disanjem. Kroz svoja predavanja razvio je pristup koji i danas dominira u matematičkoj analizi, a mnoga njegova predavanja su objavljena. Njegova predavanja su pohađali mnogi kasnije znameniti matematičari: Cantor, Frobenius, Klein, ... Najpoznatiji njegov student je svakako bila velika ruska matematičarka Sofia Kovalevska (1850. - 1891.) koja je kod njega 1870. u Berlinu pohađala privatna predavanja jer joj kao ženi nije bilo dozvoljeno upisati se na sveučilište. Zahvaljujući Weierstrassovom zalaganju Kovalevskaja je dobila počasni doktorat sveučilišta u Göttingen i posao u Stockholmu. U razdoblju do njene smrti nastavili su komunicirati i razmijenili više od 160 pisama, no nakon njene smrti Weierstrass je spalio sva njena pisma. Zadnje godine života proveo je kolicima, a umro je od upale pluća.

Rekli smo da je Cauchy zaslužan za $\varepsilon - \delta$- oblik definicije limesa funkcije, ali ga je izrazio riječima. Suvremeni oblik te definicije dao je Weierstrass, koji je uveo i oznake lim i $\lim_{x\to x_0}$. Oznaku $\lim\limits_{x\to x_0}$ uveo je G. H. Hardy 1908.

Završimo ovo poglavlje sa suvremenom definicijom funkcije. Nju je 1923. dao **Edouard Jean-Baptiste Goursat** (1858. - 1936.). Goursat kaže: *Za y kažemo da je funkcija od x ako svakoj vrijednosti od x odgovara jedna vrijednost od y. Takva veza se iskazuje jednadžbom $y = f(x)$.*. Potpuno precizne definicije funkcije temeljem teorije skupova dao je Patrick Suppes 1960.: A je relacija $\Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(x = (y, z))$. Ako $(y, z) \in A$ pišemo yAz; f je funkcija $\Leftrightarrow$ f je relacija i $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(xfy$ i $xfz \Rightarrow y = z)$.

Poglavlje 2

Razvoj teorije vjerojatnosti

2.1 Nastanak kombinatorne teorije vjerojatnosti

Jedno od prvih matematičkih djela o vjerojatnosti bila je *Liber de luda aleae* (*Knjiga o bacanju kocke*), koju je napisao Cardano, koji je i sam bio kockar, a objavljena je 1663. (87 godina nakon njegove smrti). U toj knjizi se Cardano bavi problemom kako u igrama na sreću izračunati vjerojatnost dobitka (i daje preporuke kako varati). Radi se o kombinatornoj vjerojatnosti. Tu se nalazi i klasična definicija vjerojatnosti kao omjera broja povoljnih i broja mogućih ishoda.

Uz Cardana, kao prethodnika nastanka teorije vjerojatnosti treba navesti i indijske matematičare, koji su već oko 3. st. pr. Kr. rješavali određena pitanja vjerojatnosti, uglavnom iz religioznih razloga. Indijski matematičari su najstariji poznati koji su se bavili permutacijama i kombinacijama. Pravila za njih zapisuje Mahavira u devetom stoljeću.

Nastanak teorije vjerojatnosti tradicionalno se stavlja u 17. stoljeće, kad su uspostavljeni temelji kombinatorne teorije vjerojatnosti u dopisivanju Pascala i de Fermata. Njihove je rezultate nastavio nizozemski znanstvenik Christian Huygens. U potpuno sređenom obliku, kombinatornu vjerojatnost prezentira Jacob Bernoulli 1713.

Blaise Pascal (1623. - 1662.) bio je sin pravnika Étienna Pascala, koji se iz hobija bavio i matematikom. Otac je odlučio da Blaise ne smije učiti matematiku dok ne navrši petnaest godina, no s dvanaest godina Blaise se sam počeo baviti geometrijom te ga je otac našao kako ugljenom na zidu ispisuje dokaz da je zbroj kuteva u trokutu jednak dva prava kuta. To je oca tako impresioniralo da je dozvolio Blaiseu da proučava Euklidove *Elemente*. Blaise Pascal već je u dobi od četrnaest godina počeo pratiti oca na sastanke Mersenneove grupe. Sa šesnaest godina Blaise Pascal je dokazao znameniti

Slika 2.1: Blaise Pascal, 17. st.

Pascalov teorem o mističnom heksagonu, jedan od temeljnih teorema projektivne geometrije. Kako mu je otac bio zaposlen kao sakupljač poreza, Pascal je u razdoblju 1642. – 1645. izumio mehanički kalkulator, poznat kao *Pascaline*. Godina 1646. bila je prekretnica u Pascalovom životu: od te godine intenzivno se posvetio vjeri i filozofiji. Povod prekretnici je bila očeva ozljeda nakon koje su ga njegovala dva brata iz jednog vjerskog pokreta koji su ostavili dubok dojam na Pascala. U isto doba Pascal se počeo baviti i fizikom. Tako je 1647. dokazao postojanje vakuuma. Nakon toga se susreo s Descartesom, koji nije vjerovao u postojanje vakuuma, te je poslije susreta u pismu Huygensu napisao da Pascal „*... ima previše vakuuma u glavi*". Pascal je 1653. objavio djelo o ravnoteži u tekućinama u kojem se može naći Pascalov zakon tlaka, na osnovi kojeg je SI jedinica za tlak dobila ime Pascal.

Pascal se tokom ljeta 1654. dopisivao s de Fermatom, a iz te korespondencije nastala je suvremena teorija vjerojatnosti. U doba dopisivanja s de Fermatom Pascalovo zdravlje počelo je pokazivati prve znakove slabljenja. U listopadu iste godine zamalo je izgubio život u nezgodi, kad su se konji koju su vukli njegovu kočiju uplašili te je kočija ostala visjeti na mostu nad Seinom. Slabljenje zdravlja i opisana nezgoda ostavile su i psihološke posljedice te se još više okreće vjeri. Usmjerio se na jansenizam, izvorno katolički pokret koji su pape proglasile heretičkim. Karakteristike tog pokreta su naglašavanje istočnoga grijeha i vjera u predodređenost. U ovom razdoblju pisao je filozofska djela, od kojih je najznamenitije *Pensées* (*Misli*), skup osobnih razmišljanja o ljudskoj patnji. U tom djelu zapisana je poznata **Pascalova vaga**: Ako Bog ne postoji, čovjek ništa ne gubi vjerujući u njega; ako pak postoji, nevjerovanjem gubi sve. Od mladih dana boležljiv i u jakim bolovima (bio je sklon migreni), u to je doba sve bolesniji. Umro je 1662. u Parizu, s 39 godina, nakon metastaziranja raka iz želuca u mozak.

Godine 1653. Pascal je otkrio aritmetički trokut, danas poznat kao **Pascalov trokut**. Pascalov trokut bio je nekoliko stotina godina ranije poznat Kinezima, Indijcima i Arapima, no Pascalovo djelo *Traité du triangle arith-*

métique je prvo detaljnije proučavanje tog trokuta. Pascal ga je zapisivao kao pravokutnu tablicu:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\
1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots \\
1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \dots \\
1 & 5 & 15 & 35 & 70 & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

U prvom retku i stupcu su samo jedinice, a ostali brojevi nastaju tako da zbrojimo brojeve lijevo i iznad pozicije na koju unosimo novi broj. Danas je uobičajeno tu tablicu pisati u trokutastom obliku

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}
$$

U ovakvom zapisu, rubovi su jedinice, a element na nekoj poziciji je zbroj dva elementa iznad njega.

U Pascalovom pravokutnom zapisu se tako vidi da element na nekoj poziciji nastaje zbrajanjem elemenata u stupcu lijevo od njega od prvog reda do reda u kojem je element kojeg promatramo. Ako Pascalovu tablicu smatramo (beskonačnom) matricom $P = [p_{ij}]$ imamo:

$$p_{i+1,j+1} = p_{i+1,j} + p_{i,j+1} = \sum_{k=1}^{i+1} p_{k,j}.$$

Tako je npr. broj 20 na poziciji četvrti redak, četvrti stupac, jednak $1 + 3 + 6 + 10$. U trokutastom obliku ovo pravilo je nešto nezgodnije za zapisati. Pascal je otkrio i niz drugih svojstava ovog trokuta. Nizovi u svakom retku su figurativni brojevi. U drugom redu je niz prirodnih brojeva, u drugom niz trokutnih brojeva $T_n = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, u trećem niz piramidalnih brojeva $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ itd. U trokutnom zapisu retci postaju dijagonale slijeva gore udesno dolje (a stupci dijagonale zdesna gore ulijevo dolje).

Danas kažemo: broj $p_{i+1,j+1}$ je **binomni koeficijent** $\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!j!}$; vidimo dakle da je Pascalov trokut tablica binomnih koeficijenata. Nalaženje binomnih koeficijenata lakše je u suvremenom trokutastom zapisu Pascalova trokuta: binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ nalazi se kao $(k+1)$-vi element u $(n+1)$-vom redu. Kako je poznato, binomni koeficijenti su koeficijenti koji se pojavljuju u binomnoj formuli

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$$

i lako i brzo ih se računa koristeći Pascalov trokut. Pravilo za računanje binomnih koeficijenata u terminima binomnih koeficijenata je

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

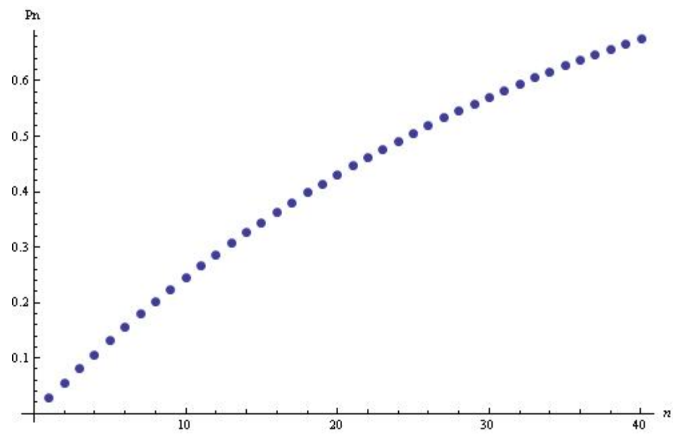
Tako su koeficijenti za $(x+y)^3$ redom elementi četvrtog retka Pascalova trokuta (zapisanog na suvremeni način): to su $1, 3, 3, 1$ pa je $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Pascal je trokut koristio kako za binomni teorem, tako i kombinatorno. Broj $\binom{n}{k}$ predstavlja broj načina da od n elemenata odaberemo njih k (ne pazeći na poredak). U toj interpretaciji lako je dokazati gornje pravilo: želimo li odabrati k od $n+1$ elemenata ($\binom{n+1}{k}$) to možemo učiniti tako da prvo odaberemo jedan element, a od preostalih n elemenata treba odabrati njih $k-1$ ($\binom{n}{k-1}$) ako je taj prvi element jedan od onih k koje biramo ili (+) od preostalih n elemenata treba odabrati njih k ($\binom{n}{k}$) ako onaj prvi odabrani element nije jedan od k koje biramo. Pascal je znao i faktorijelnu definiciju binomnog koeficijenta, iz koje se također lako dokaže gornje svojstvo.

Godine 1654. Pascal se dopisivao s de Fermatom. U tim pismima uspostavljena je teorija vjerojatnosti. Povod dopisivanju bili problemi s kojima je kockar **Chevalier de Méré** došao Pascalu.

Jedan problem je bilo pitanje isplati li se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica. Drugi problem je bio kako raspodijeliti uloge u slučaju prijevremeno prekinute igre na sreću, u kojoj u svakom krugu nema neodlučenog ishoda, a pobjednik je onaj koji prvi pobijedi u određenom broju krugova.

Prvi problem lako rješiv, kako su odmah uvidjeli Pascal i de Fermat: vjerojatnost da će u jednom bacanju pasti par šestica je $1/36 \approx 2,78\%$ jer je samo jedna od 36 mogućih kombinacija „(broj na prvoj kocki, broj na drugog kocki)" odgovarajuća. Stoga je vjerojatnost da u jednom bacanju neće pasti par šestica jednaka $p = 35/36 \approx 97,22\%$. Svako bacanje je nezavisno od prethodnog, pa se za dobivanje vjerojatnosti da u n bacanja nijednom ne padne par šestica p treba n puta množiti sam sa sobom: $P = p^{24} \approx 50,86\%$ je vjerojatnost da u 24 bacanja nijednom ne padne par šestica. Kako je će u 24 bacanja ili bar jednom pasti ili nijednom ne pasti par šestica, znači da je vjerojatnost da par šestica bar jednom padne $1 - P \approx 49,14\%$ tj. ne isplati

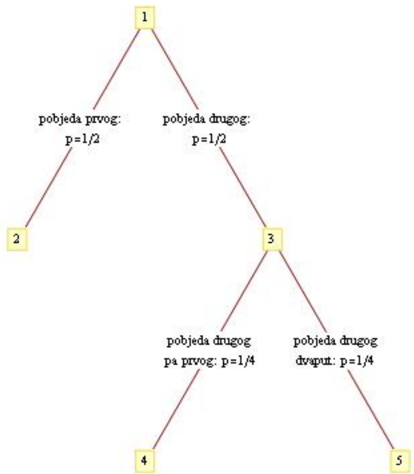


Slika 2.2: Vjerojatnosti $P_n = 1 - (35/36)^n$ da će u n bacanja bar jednom pasti par šestica.

se kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica (ali za 25 bacanja bi se isplatilo – provjerite sami!).

Problem podjele uloga je izazvao komunikaciju Pascala i de Fermata, u kojoj su se oba složili oko točnog rješenja, ali dali različite dokaze. Prije njih su se, bez uspješnog rješenja, takvim pitanjima bavili i Pacioli, Tartaglia i Cardano. Očigledno je u slučaju trenutnog stanja bodova $k : k$ pravedno ulog podijeliti popola. Pascal je u svom rješenju ovog problema zamislio da se igra nastavila i razmotrio vjerojatnosti različitih varijanti daljnjeg razvoja igre. Ako je igra prekinuta u trenutku kad prvom igraču do pobjede fali n bodova, a drugom m bodova, znači da bi igra bila odlučena za najviše $n + m - 1$ krugova. Npr. ako je prekinuta pri stanju 9 : 8, a za pobjedu treba 10 (dakle $n = 1$, $m = 2$), igra će završiti nakon najviše dva kruga – nakon jednog ako u njemu pobijedi prvi (bit će 10 : 8), nakon dva ako u prvom krugu pobijedi drugi (nakon prvog kruga bi tada stanje bilo 9 : 9 pa odluka pada u idućem krugu). Najbrže je igra gotova ako zaredom pobjeđuje onaj kojem je ostalo manje do dobitka (dakle najbrže je igra gotova nakon $\min(m, n)$ krugova), a najdulje će trajati ako igrači naizmjenično dobivaju i slabiji još dobije onoliko puta koliko je razlika između njega i boljega. Situacija za stanje 9:8 je ilustrirana slikom 2.3, s koje je vidljivo da je tada pravedna raspodjela uloga 3 : 1.

Vezu s Pascalovim trokutom, otkrio je Pierre de Fermat. U pismu Pascalu iz kolovoza 1654. kaže da ako prvom igraču do pobjede fale 2 boda, a drugom 3, do pobjede, možemo uzeti dva slova (a za pobjedu prvog i b za pobjedu drugog) i promotriti svih 16 kobinacija riječi od 4 slova (što odgo-



Slika 2.3: Mogući razvoji igre prekinute pri stanju 9:8, ako za pobjedu treba 10 bodova.

vara 4 kruga igre) koje možemo iz njih oblikovati: *aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, baaa, baab, baba, babb, bbaa, bbab, bbba, bbbb*. Svaka kombinacija s bar dva a predstavlja situaciju u kojoj pobjeđuje prvi igrač, a one s bar tri b su u korist b. Slijedi da je 11 slučajeva koji daju pobjedu za prvog, a 5 za drugog, tj. u opisanom slučaju ulog treba raspodijeliti u omjeru 11 : 5. S obzirom da se radi o kombinacijama, očita je upotreba Pascalova trokuta, kojom se izbjegava ispisivanje svih kombinacija. U navedenom slučaju treba pogledati četvrti red Pascalova trokuta (brojimo od 0) koji je jednak $1, 4, 6, 4, 1$. U tom redu su redom nabrojani brojevi kombinacija dva objekta (pobjede po rundama) u kojima se prvi (pobjeda prvog) pojavljuje $4, 3, 2, 1, 0$ puta, odnosno drugi (pobjeda drugog) se pojavljuje $0, 1, 2, 3, 4$ puta. Kako za konačnu pobjedu prvog treba bar 2 kruga, povoljni za prvog su prva tri slučaja te računamo $1 + 4 + 6 = 11$, a za drugog su povoljna preostala dva: $4+1 = 5$. Zaključujemo da je pravedan omjer dobitaka 11 : 5.

Na taj način uvedena je **binomna razdioba** koja opisuje vjerojatnosti uspjeha u ponovljenom pokusu koji ima samo dva moguća ishoda. Ako je p vjerojatnost uspjeha, a $q = 1 - p$ neuspjeha, vjerojatnost da će od n pokusa točno k biti uspješno (a $n - k$ neuspješno) jednaka je k-tom članu binomnog

Slika 2.4: Christiaan Huygens, 17. st.

razvoja od $(p+q)^n$:

$$p_{k,n} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Christiaan Huygens (1629. - 1695.) rođen je i umro u nizozemskom gradu Den Haagu. Život mu nije imao posebno zanimljivih događaja, ali su njegovi znanstveni doprinosi iznimni. Bavio se geometrijom, poboljšao je teleskop pomoću kojeg je riješio niz astronomskih pitanja, izumio je sat s njihalom, a do 1657. je postao tako znamenit da mu je francuski kralj Louis XIV dao penziju uz uvjet da se preseli u Pariz, što je Huygens i učinio. Glavno djelo mu je *Horologium Oscillatorium* objavljeno 1673. u Parizu. U tom djelu obrađuje pad tijela u vakuumu, njihalo, centrifugalnu silu, a po prvi put se primjenjuje dinamika na objekte određene dimenzije (a ne samo bezdimenzijske točke). Pod Huygensovim nadzorom bio je izrađen i prvi džepni sat s regulirajućom oprugom. Godine 1681. se zbog sve veće netolerancije od strane katolika u Francuskoj vratio u Nizozemsku. Tu se bavio konstrukcijama leća velike fokalne duljine, 1689. je posjetio Englesku i upoznao Newtona, zatim je 1690. objavio rad o svjetlosti na temelju Hookeovih ideja o svjetlosti kao valu. Izveo je zakone odbijanja i loma. U matematici je osobito važan za matematičku analizu, diferencijalni račun i diferencijalnu geometriju. Godine 1657. objavio je knjižicu *De ratiociniis in ludo aleae* o teoriji vjerojatnosti na temelju Pascalovih i de Fermatovih rezultata, što je prva matematička knjiga o vjerojatnosti u povijesti. U tom djelu se koristi riječ **očekivanje** za „pravednu nagradu za koju bi igrač predao svoje mjesto u nekoj igri". S vremenom će se taj pojam precizirati.

Prva teorijska diskusija vjerojatnosti kao broja između 0 i 1 nalazi se u djelu *Ars conjectandi* **Jacoba Bernoullija**, objavljenom posthumno 1713. Godine 1689. objavio je **(Bernoullijev) zakon velikih brojeva**: ako pokus ponovimo dovoljno mnogo puta relativna frekvencija (broj povoljnih ishoda podijeljen s brojem izvedenih pokusa) jednaka je vjerojatnosti uspjeha. Najoriginalnije djelo mu je *Ars Conjectandi*. Djelo je ostalo nezavršeno, ali se može smatrati prvim kompletnim pregledom teorije vjerojatnosti i njime teorija vjerojatnosti postaje zasebna matematička disciplina. U tom djelu se nalazi i filozofski pristup vjerojatnosti te definicije vjerojatnosti *a priori* i *a posteriori*. *Ars Conjectandi* se sastoji od četiri dijela. U prvom dijelu Jacob Bernoulli proširuje Huygensove rezultate. Tu među inim razrađuje i pojam očekivanja, a razrađeni su i pojmovi danas poznati kao Bernoullijevi pokusi i Bernoullijeva distribucija[1]. Drugi dio je posvećen kombinatorici. U njemu se koristi suvremeni pojmovi permutacija i kombinacija (kombinacije je uveo Pascal, permutacije Jacob Bernoulli). Tu se pojavljuju i Bernoullijevi brojevi: to su brojevi oblika B_n gdje je $B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_n = 0$ ako n neparan veći od 1, $B_{n+1} = -\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+2}{k}B_k$. Ti su brojevi našli značajnu primjenu u analitičkoj teoriji brojeva. Vrijedi:

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{2n}}{(2n)!}x^{2n}.$$

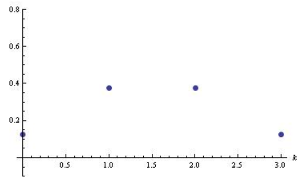
Treći dio *Ars conjectandi* obrađuje primjenu kombinatorike na vjerojatnost u igrama na sreću. Četvrti dio je ostao nezavršen, ali je najvažniji dio djela. U tom dijelu primjenjuje vjerojatnost na donošenje ekonomskih odluka. Tu se uočava i da se vjerojatnost može odrediti i *a posteriori* iz promatranih frekvencija događaja. Pokušao je odrediti gornju među za broj pokusa potrebnih da iz rezultata procijenjena vjerojatnost bude „moralno sigurna" i pokazao da je taj broj vrlo velik: da bi se npr. odredio broj kuglica dvije boje u urni (čiji sadržaj nije vidljiv) sa sigurnošću 99%, potrebno je više od 25500 pokusa vađenja jedne kuglice. Pokazana je i slijedeća tvrdnja: ako se dva događaja A i B međusobno isključuju i pokus nema drugih mogućih ishoda te ako je nakon $m+n$ pokusa m puta ispao A, a n puta B, onda se za veliko broj pokusa broj $\frac{m}{n}$ približava omjeru $\frac{p}{q}$ vjerojatnosti dogajaja A i B ($q = 1-p$):

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{n}{k-n}=\frac{p}{q}$$

gdje je $k = m+n$ ukupni broj pokusa.

Rezultate Jacoba Bernoullija nadopunio je i pojednostavio **Abraham de Moivre** (1667. - 1754.). Iako je de Moivre najpoznatiji po formuli za kompleksne brojeve, njegovi glavni doprinosi matematici tiču se teorije vjerojatnosti. De Moivre prvi daje klasičnu definiciju vjerojatnosti kao omjera broja

[1] Bernoullijeva distribucija je najjednostavnija diskretna distribucija. Odnosi se na pokuse s dva moguća ishoda $n = 1$ („uspjeh") i $n = 0$ („neuspjeh") od kojih se prvi događa s vjerojatnosti p, a drugi s vjerojatnosti $q = 1-p$. Bernoullijev pokus sastoji se u izvođenju pokusa fiksirane vjerojatnosti uspjeha određeni broj puta. Promatramo li broj uspjeha u određenom broju nezavisnih Bernoullijevih pokusa dobivamo binomnu razdiobu.



Slika 2.5: Abraham de Moivre, 17./18. st.

povoljnih i broja mogućih slučajeva, no bez definicije to su koristili i Pascal i de Fermat.

Kako je de Moivre bio protestant, nakon edikta iz Nantesa (1685.) bio je neko vrijeme u zatvoru, a nakon tog se odselio u Englesku gdje je proživio ostatak života. Nakon dolaska u London za život je zarađivao kao privatni učitelj matematike te je učenike podučavao u njihovim domovima, ali i u londonskim kafićima. Prema nekim izvorima, za život je zarađivao i dajući savjete kockarima. Prijatelji su mu bili Edmund Halley i Newton. Tako je 1710. postao i članom komisije koja je trebala razriješiti svađu Newtona i Leibniza oko prvenstva u otkrivanju infinitezimalnog računa – *Royal Society* ga je na to mjesto imenovalo upravo zbog njegova prijateljstva s Newtonom. Ipak, zanimljivo je da je imenovan kao član komisije tako uglednog društva, a da pritom nije bio zaposlen na nekom sveučilištu. De Moivre se naime nadao dobiti poziciju profesora matematike, no kao što je u Francuskoj bio diskriminiran zbog svoje protestantske vjere, u Engleskoj je bio diskriminiran jer je Francuz. Tako je de Moivre cijeli život proveo prilično siromašan i bez stalnog zaposlenja, u čemu mu nisu uspjeli pomoći ni njegovi utjecajni prijatelji. De Moivre se nikad nije oženio. Poznata je anegdota da je predvidio dan svoje smrti tako što je utvrdio da svaki dan spava po 15 minuta dulje te je sumacijom odgovarajućeg aritmetičkog niza izračuna da će umrijeti na dan kad prespava puna 24 sata (i bio je u pravu).

Kao što je rečeno, glavni de Moivreovi doprinosi vezani su za teoriju vjerojatnosti. Njegovo glavno djelo je *The Doctrine of Chance: A method of calculating the probabilities of events in play* (latinska verzija objavljena je 1711., a engleska 1718.). *The Doctrine of Chance* je iznimno važno djelo za teoriju vjerojatnosti te je doživilo i više kasnijih proširenih izdanja. U toj se knjizi među inim može naći definicija statističke neovisnosti događaja te niz zanimljivih zadataka vezanih za razne igre. Jedan od zadataka (u izdanju iz 1738.) bio je:

Zadatak 1 *Dan je niz različitih slova i biraju se nasumično. Treba naći vjerojatnost da će se neka od njih pojaviti na istom mjestu u redoslijedu kako* *su i u abecedi, a da su pritom druga na krivim mjestima.*

Za slučaj samo tri slova, recimo a, b i c, varijanta gornjeg zadatka bila bi: koja je vjerojatnost da se pri slučajnom rasporedu rasporede tako da a bude prvo, a b i c zamijene mjesta. Imamo 3!=6 mogućih načina (permutacija) da poredamo ta tri slova. Od tih šest načina samo jedan (acb) zadovoljava navedene uvjete te je vjerojatnost takvog rasporeda $\frac{1}{6}$*. Ako bismo imali četiri slova a, b, c i d (uz zabranjeno ponavljanje slova) i želimo vjerojatnost da točno tri budu na pravim mjestima, ta je vjerojatnost 0 – ako su tri na pravim mjestima, onda je i četvrto. Za slučaj pet slova a, b, c, d, e vjerojatnost da dva budu na točnom mjestu (recimo, a i b), a ostala tri ispremiješana (nijedno na svom mjestu) je, ako nisu dozvoljena ponavljanja,* $\frac{2}{120}$*. U tom slučaju naime imamo* $5! = 120$ *mogućih rasporeda. Od tih nam odgovaraju samo dva: abdec i abecd (u svim drugim koji počinju s ab bar jedno od ostalih slova je na svom mjestu: abcde, abced, abdce, abedc).*

Najpoznatiji je svakako tzv. „gamblers' ruin problem" (**problem kockareve propasti**), koji se pojavio u trećem izdanju 1756. Radi se o sljedećem zadatku:

Zadatak 2 *Dva kockara igraju igru u kojoj u svakom krugu ulažu isti iznos (recimo 1 novčanu jedinicu) i što jedan dobije drugi gubi (primjerice, bacaju novčić i ako padne pismo, dobiva prvi, a ako padne glava, dobiva drugi). Vjerojatnost da prvi dobije u nekom krugu neka je* p*, a vjerojatnost da drugi dobije je* q *(pritom je* $p+q=1$ *jer sigurno jedan od njih dvoje dobiva). Igra se igra sve dok jedan od njih ne ostane bez novac (ruiniran je). Ako prvi kockar na raspolaganju ima* n *novčanih jedinica za ulaganje, a drugi njih* m*, koja je vjerojatnost da će prvi biti ruiniran?*

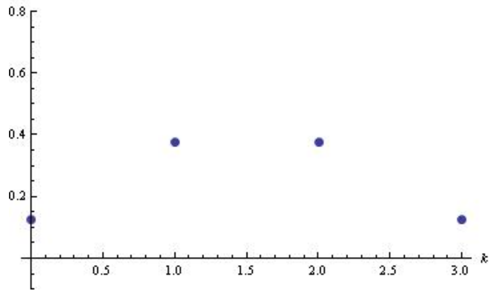
Tim zadatkom se za neke vrijednosti $n = m$ bavio Huygens, a poopćili su ga Jacob Bernoulli i de Moivre. Upravo de Moivre je (1712.) dao prvo objavljeno rješenje tog problema. Tražena vjerojatnost iznosi

$$p_A = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}.$$

Za slučaj kad je $p = q = 1/2$ (recimo, o pobjedi odlučuje bacanje novčića) formula je

$$p_A = \frac{n}{n+m}.$$

U *Doctrine of Chance* je normalna razdioba vjerojatnosti opisana kao granični slučaj binomne za velik broj pokusa. Tu se po prvi put u povijesti



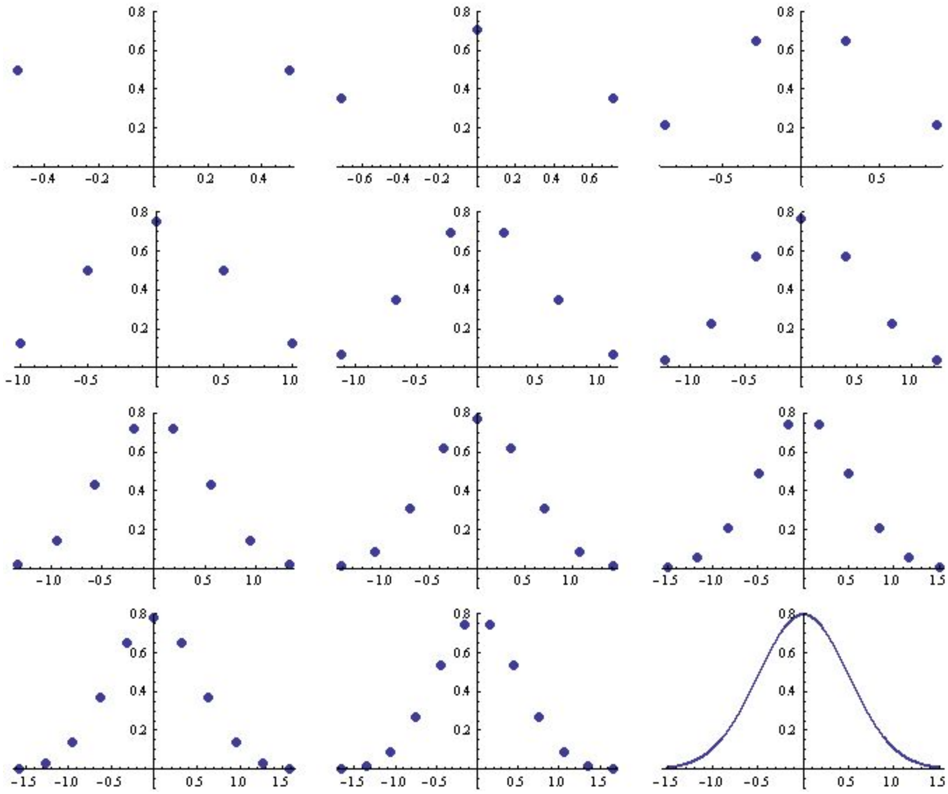
Slika 2.6: Normalizirani i s $\sqrt{3}$ skalirani binomni koeficijenti za $n = 3$.

pojavljuje integral gustoće vjerojatnosti normalne distribucije i tzv. centralni granični teorem (prvi put ga je objavio u jednom članku iz 1733.): za velik broj pokusa binomna razdioba teži prema normalnoj. Te je rezultate kasnije poboljšao Laplace.

Ideju približavanja binomne razdiobe normalnoj de Moivre je dobio promatrajući binomni teorem. Kako je suma svih binomnih koeficijenata u formuli za $(1+x)^n$ uvijek[2] 2^n, ako sve binomne koeficijente $\binom{n}{k}$ „normaliziramo" dijeljenjem s 2^n, zbroj takvih normaliziranih koeficijenata bit će 1. Nadalje, de Moivre je uočio da ako te binomne koeficijente množimo s $\sqrt{n}$ i crtamo tako modificirane koeficijente (tj. crtamo točke $\left(k, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ u koordinatnom sustavu), onda pomakom i skaliranjem apscisa dobivamo nizove točaka koji sve više sliče jednoj te istoj krivulji. Primjerice, za $n = 3$ su binomni koeficijenti redom: za $k = 0$ koeficijent 1, za $k = 1$ koeficijent 3, za $k = 2$ koeficijent 3 i za $k = 3$ koeficijent 1. Normaliziramo dijeljenjem s $2^n = 2^3 = 8$ te dobivamo normalizirane koeficijente: za $k = 0$ koeficijent $\frac{1}{8}$, za $k = 1$ koeficijent $\frac{3}{8}$, za $k = 2$ koeficijent $\frac{3}{8}$ i za $k = 3$ koeficijent $\frac{1}{8}$. Množimo ih sa $\sqrt{n} = \sqrt{3}$ i dobivamo: za $k = 0$ i $k = 3$ koeficijent $\frac{\sqrt{3}}{8} \approx 0,216506$, a za $k = 1$ koeficijent i za $k = 2$ koeficijent $\frac{3\sqrt{3}}{8} \approx 0,649519$. Ako bismo crtali ovisnost takvih koeficijenata o k dobili bismo graf na slici 2.6.

Ukoliko sad sve točke ponaknemo za $\frac{n}{2}$ ulijevo (za opisani primjer: sve apscise smanjimo za $1,5$) dobit ćemo raspored točaka simetričan obzirom na os ordinata. Ako još sve apscise podijelimo s $\sqrt{n}$, imati ćemo točke s koordinatama $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$ i pri crtanju ćemo dobiti grafove kao na slici 2.7. Slučaj za $n = 3$ nakon pomaka i skaliranja apscisa na toj je slici treći u prvom redu. Na toj je slici kao zadnji graf ucrtana zvonolika krivulja, graf

[2] To se lako vidi uvrštavanjem $x = 1$ u formulu za $(1 + x)^n$.



Slika 2.7: Normalna distribucija kao limes binomnih. Na slikama su za $n = 1, \ldots, 11$ ucrtane točke $\left(\frac{k-\frac{n}{2}}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{n}}{2^n}\binom{n}{k}\right)$. Zadnji graf je graf funkcije $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$.

funkcije[3] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2x^2}$. Sa slika je vidljivo da nizovi točaka s povećanjem n postaju sve sličniji tom grafu.

De Moivre se bavio i statistikama smrtnosti, a postavio je i temelje teorije penzija te je 1724. objavio *Annuities on lives*. U tom djelu koristi podatke do kojih je došao Halley, a izveo je formule za iznose penzija temeljem postuliranog zakona smrtnosti i pretpostavke konstantnosti kamata. Tu je primjerice opisao i pravednu podjelu penzije među nasljednicima.

U *Miscellanea Analytica* (1730.) koristio je formulu koja je danas poznata kao Stirlingova. De Moivre ju je upotrijebio u izvodu aproksimacije normalne razdiobe binomnim. **Stirlingova formula** (bolje bi bilo reći: de Moivre-Stirlingova) je formula koja aproksimira vrijednost $n!$ za velike n:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

De Moivre je Stirlingovu otkrio do na konstantu tj. znao je da za neku konstantu C i velike n vrijedi $n! \approx C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, a James Stirling je utvrdio da je ta konstanta $C = \sqrt{2\pi}$. U drugom izdanju *Miscellanea Analytica* de Moivre priznao je Stirlingu doprinos za poboljšanje te formule.

Znamenita **de Moivreova formula**

$$(\cos x + i \sin x)^n = cos(nx) + i \sin(nx)$$

prvi put se u tom obliku pojavila u članku kojeg je de Moivre objavio 1722., no sličnu formulu koristio je već u jednom članku iz 1707. De Moivre ju je izveo za prirodne brojeve n, dok ju je u punoj općenitosti izveo Euler. De Moivre je svoju formulu koristio u raznim djelima. Tako je primjerice u jednom članku iz 1739. dan sljedeći primjer.

Primjer 1 *Potrebno je naći sva tri kubna korijena broja* $81+\sqrt{-2700}$*, kojeg bismo danas zapisali kao* $81 + 30\sqrt{3}i$ *(oznaku* i *za imaginarnu jedinicu uveo je Euler). Prvi korak bio je zapisati taj kompleksan broj u trigonometrijskom obliku. Apsolutna vrijednost mu je* $r = \sqrt{81^2 + 2700} = 21\sqrt{21}$*, a argument je dan s* $\operatorname{tg}\phi = \frac{\sqrt{2700}}{81}$ *pa je* ϕ *približno* $32,68°$*. Nakon tog je de Moivre računao vrijednost izrazâ*

$$\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\phi + 360°k}{3} + \sin\frac{\phi + 360°k}{3}\right)$$

za $k = 0, 1, 2$ *(vidimo da je bio svijestan da kompleksan broj ima* n n*-tih korijena od kojih samo prvi dobivamo iz de Moivreove formule za eksponent* $1/n$*). Kako je* $\sqrt[3]{r} = \sqrt[3]{21\sqrt{21}} = \sqrt{21}$ *i* $\frac{\phi}{3} \approx 10,89°$ *pomoću tablica dobio je sva tri kubna korijena od* $81 + \sqrt{-2700}$*:* $\frac{9}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$*,* $-3 + 2\sqrt{3}i$ *te* $-\frac{3}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i$*.*

[3] Ta je funkcija f funkcija gustoće vjerojantosti s parametrima $\mu = 1$ i $\sigma = \frac{1}{2}$.

Slika 2.8: Daniel Bernoulli, 18. st.

2.2 Formaliziranje teorije vjerojatnosti

Nećak Jacoba i sin Johanna Bernoullija, dobar prijatelj Leonharda Eulera, **Daniel Bernoulli** (1700. - 1782.) 1760-ih godina prvi uvodi tehnike diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti, a svoja je otkrića primjenjivao na pitanja osiguranja. Ideju uvođenja diferencijalnog računa u teoriju vjerojatnosti opisat ćemo na primjeru. Uzmimo da imamo dvije urne s po n kuglica, u jednoj plavih, u drugoj žutih. Neka se pokus sastoji u istovremenom prebacivanju po jedne kuglice iz jedne u drugu i druge u prvu urnu, bez gledanja. Neka je r broj pokusa. Zanima nas koji je najvjerojatniji broj plavih kuglica x u prvoj urni nakon r pokusa. Kombinatorni postupak u ovom zadatku zahtijevao bi jako puno računa. Rezultat je

$$x = \frac{n}{2}\left(1 + \binom{n-2}{n}\right).$$

Za velike n taj broj može se procijeniti i sa $\frac{n}{2}\left(1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right)$. Metoda Daniela Bernoullija je da se za velike n promjena broja kuglica neke boje za 1 može shvatiti kao infinitezimalni porast ili smanjenje ukupnog broja. Uzmimo da su x i r neprekidno promjenljive veličine. Ukoliko je trenutno u prvoj urni x plavih kuglica, onda je vjerojatnost da se iz nje izvadi (predznak $-$) i u drugu prebaci jedna plava kuglica jednaka $\frac{x}{n}$, a da se u nju stavi (predznak $+$) jedna plava kuglica iz druge urne vjerojatnost je $\frac{n-x}{n}$. Slijedi da je

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} = -\frac{x}{n} + \frac{n-x}{n}.$$

Lijeva strana je omjer prirasta broja plavih kuglica u prvoj urni i prirasta broja pokusa. Gornja diferencijalna jednadžba se lako riješi metodom separacije varijabli:

$$\frac{\mathrm{d}x}{2x-n} = -\frac{\mathrm{d}r}{n}$$

Slika 2.9: Thomas Bayes, 18. st.

$$\frac{1}{2}\ln(2x-n) = -\frac{r}{n}r + C_1$$
$$2x - n = Ce^{-\frac{2r}{n}}$$
$$x = \frac{n}{2} + \frac{C}{2}e^{-\frac{2r}{n}}$$

Kako je $x(0) = n$, slijedi $n = \frac{n}{2} + \frac{C}{2}$ tj. $C = n$ pa je

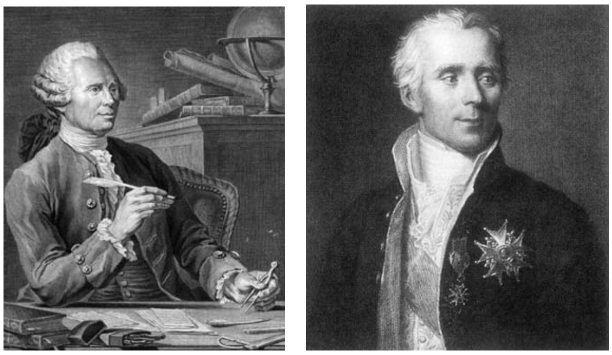
$$x(r) = \frac{n}{2}\left(1 + e^{-\frac{2r}{n}}\right),$$

kao i gore.

Protestantski svećenik **Thomas Bayes** (1702. - 1762.), možda de Moivreov učenik, teoriju vjerojatnosti obrađuje u *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances* (1764.). Bayes je poznat po uvođenju uvjetne vjerojatnosti: vjerojatnost da se desi B ako je poznato da se dogodio A jednaka je kvocijentu vjerojatnosti da se dogode oba A i B s vjerojatnosti od A:

$$p(B \mid A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Jean D'Alembert (1717. -1783.) obrađuje pojam očekivanja: ako su vjerojatnosti događaja s dobicima $k_1, k_2, \ldots$ redom $p_1, p_2, \ldots$ onda je očekivani ukupni dobitak $k_1p_1 + k_2p_2 + \ldots$. D'Alembert se bavio i igrom *roulette* te je poznata strategija **d'Alembertov martingal**: d'Alembert predlaže da u svakom krugu igrač treba uložiti dvostruko više. Ukoliko dovoljno dugo igra, to bi garantiralo dobitak iznosa koliko je uložio u prvom krugu. Primjerice, u prvom krugu igrač uloži 1\$ na crveno. Ako dobije, prekida igru – zaradio je 1\$. Ako izgubi u sljedećem krugu uloži 2\$. Ako sad dobije zaradio je $2\$ - 1\$ = 1\$$ i prekida igru. Ako opet izgubi, u sljedećem krugu uloži 4\$. Ako sad dobije, zaradio je $4\$ - 2\$ - 1\$ = 1\$$, a ako opet izgubi u sljedećem krugu ulaže 8\$ itd.



(a) (b)

Slika 2.10: Jean d'Alembert, 18. st., i Pierre-Simon Laplace, 18./19. st.

Modernu teoriju vjerojatnosti utemeljio je **Pierre-Simon Laplace** (1749. - 1827.) svojim djelom *Théorie Analytique des Probabilités* (1812.), koje predstavlja pregled svih dotad poznatih rezultata iz teorije vjerojatnosti proširene mnogim originalnim Laplaceovim doprinosima. Osim po rezultatima u teoriji vjerojatnosti, Laplace je najpoznatiji po novim astronomskim rezultatima: dokazao je da putanje planeta ne uznemiruju stabilnost Sunčeva sustava, nego ju održavaju. Laplace je bio primijenjeni matematičar, a matematičku analizu je smatrao prije svega sredstvom za rješavanje fizikalnih i astronomskih problema.

Kao osobna karakteristika Laplacea osobito je uočljiv njegov politički oportunizam, tako da je paralelno sa svojom znanstvenom karijerom uspio u burnim francuskim vremenima prijelaza 18. u 19. stoljeće održati se i na mnogim visokim pozicijama. Nesuprot izvanrednim znanstvenim rezultatima, Laplace se nije istakao u međuljudskim odnosima. S vremenom, postajao je sve manje skroman oko svojih dostignuća i sve više je ignorirao druge ljude oko sebe. Tako je nakon posjeta Akademiji 1780. – 81. Lexell komentirao kako je Laplace dao do znanja da se smatra najboljim matematičarem u Francuskoj. Prema svojim dobročiniteljima iz mladosti i kasnijim političkim prijateljima ponašao se nezahvalno i s prezirom. Ipak, imao je nezavisan karakter i otvoreno iskazivao svoje mišljenje, a osobito potkraj života pokazao se i velikodušnim: u jednom je slučaju zadržao svoj rezultat od objavljivanja kako bi jedan njegov učenik mogao dobiti potpunu zaslugu za istraživanje.

Namjera Laplaceovog oca je bila da Laplace nađe zvanje u crkvi, te je u skladu s tim bilo njegovo početno školovanje i upis studija teologije na sveučilištu u Caenu kad je imao 16 godina. Tokom dvije godine na sveučilištu otkrio je ljubav prema matematici te je napustio studij teologije i otišao u Pariz. Jedan od profesora iz Caena koji je u njemu otkrio matematički talent dao mu je pismo preporuke za d'Alemberta koji je brzo uočio Laplaceove sposobnosti te mu je pomogao i u usmjeravanju svog matematičkog rada i u nalaženju radnog mjesta. Tako je ubrzo Laplace dobio mjesto profesora matematike na vojnoj školi.

Prvi Laplaceovi matematički radovi bili su iz područja diferencijalnih i diferencijskih jednadžbi, te primjena u mehanici i fizikalnoj astronomiji. Kako mu je ugled rastao, tako su Laplaceu rasle i ambicije te je već 1771. pokušao biti izabran u Francusku akademiju znanosti. Te je godine prednost dana Vandermondeu, a iduće Cousinu kojeg je Laplace smatrao bitno slabijim matematičarem od sebe te ga je to prilično naljutilo. Godine 1773. Laplace je izabran je za pridruženog člana Akademije, punopravan član postaje 1785. Tokom 1770-ih reputacija mu je stalno rasla, a Laplace je usavršavao svoje matematičke tehnike i sve više se usmjeravao dvama područjima na kojima će dati svoje najvažnije rezultate: teoriji vjerojatnosti i nebeskoj mehanici. Tako je 1780-ih Laplace postao jedan od najznačajnijih i najutjecajnijih znanstvenika svog doba. Kao član Akademije, sudjelovao je u mnogim odborima, npr. u odboru koji je trebao donijeti ocjenu rada najveće pariške bolnice. Tu je Laplace iskoristio svoje znanje vjerojatnosti da usporedi stopu smrtnosti u toj bolnici s drugim bolnicama u i izvan Francuske. Godine 1780., Laplace je počeo surađivati sa znamenitim kemičarem Antoine Lavoisierom, te se tako počeo baviti i teorijom topline. Zajedno su utvrdili kemijsku ekvivalenciju disanja i izgaranja drvenog ugljena.

U doba pred Francusku revoluciju, Laplace je radio kao ispitivač pri Kraljevskom artiljerijskom odredu. Tu je godine 1785. ispitao i propustio šesnaestogodišnjeg Napoleona Bonaparta. Godine 1787. dovršio je dokaz stabilnosti Sunčeva sustava. Za vrijeme Revolucije, Laplace je 1790. bio član komisije za standardizaciju mjera koja je radila na uvođenju metričkog i decimalnog sustava, jedine od komisija Akademije koje su smjele nastaviti rad i nakon što je strahovlada 1793. ukinula Akademiju. Ipak, ubrzo zatim su iz komisije izbačeni kako Laplace, tako i neki njeni drugi članovi (među inim Lavoisier i Coulomb). Naime, strahovlada je zahtijevala da članovi Komisije budu zaslužni po „svojim republikanskim vrlinama i mržnji na kraljeve".

Iako je uspio izbjeći sudbinu giljotine, za razliku od Lavoisiera i mnogih drugih kolega, ovo doba je bilo teško za Laplacea. Kad je skupa s Lagrangeom trebao konstruirati kalendar po želji revolucionarne vlade, iako je znao da su njihove ideje suprotne astronomskim podacima, odlučio je ne suprotstavljati se političkoj dogmi. Slično se konformistički složio s podjelom kuta na sto dijelova.

Tokom 1795. Laplace je predavao (ne samo) teoriju vjerojatnosti na novoosnovanoj učiteljskoj školi *École Normale*. Ta je predavanja zapisao i objavio 1814. kao *Essai philosophique sur les probabilités*. U tom se djelu može naći tzv. **Laplaceov demon**, filozofsko polazište determinizma i mehanicističke slike svijeta. Laplaceov demon je ime za shvaćanje po kom je moguće izračunati svako prošlo ili buduće stanje ako se znadu svi prirodni zakoni. Prema Laplaceovom mišljenju, svijet je potpuno određen početnim uvjetima i zakonima kretanja. Laplaceov demon je inteligencija koja bi trebala postići da se sva pravila svijeta svedu na matematičku formulu, točnije sustav diferencijalnih jednadžbi, iz kog bi se mogli izračunati pozicija, smjer kretanja i brzina svakog atoma u svemiru. Prema suvremenoj fizici, glavna tri prigovora predožbi o Laplaceovom demonu su teorija relativnosti, kvantnofizička saznanja, te ograničenost izračunavanja (posljedica teorije kaosa je da bi demon za svoje predskazivanje nekog stanja svemira trebao bar toliko vremena koliko svemiru treba da to stanje zauzme, pa bi svako predskazivanje kasnilo). Laplace je također, u skladu s racionalizmom svog doba, ustvrdio da vjerojatnost nije ništa drugo doli računski izražen zdrav razum.

Svoju znamenitu hipotezu da je Sunčev sustav nastao hlađenjem i kontrakcijom velikog, spljoštenog i sporo rotirajućeg oblaka užarenog plina predstavio je 1796. Niz svojih astronomskih rezultata objavio je 1799. u znamenitom djelu *Traité de Mécanique Céleste*. Zapravo, te su godine izdana prva dva dijela tog rada, a kasnije (1802., 1805. i 1825.) su izdana još tri dijela. Radi se u biti o upotpunjenju Newtonova djela *Philosophiae naturalis principia mathematica*. U *Mécanique Céleste* Laplace obrađuje opća pravila ravnoteže i kretanja krutih tijela i tekućina i plinova, zakon univerzalne gravitacije, kretanja centara gravitacije pojedinih tijela Sunčeva sustava, nebesku mehaniku, nastanak plime i oseke, ... Od matematike, bitno koristi diferencijalne jednadžbe. Tu se pojavljuje i parcijalna diferencijalna jednadžba poznata kao **Laplaceova jednadžba** za razne vrste potencijala U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0.$$

Iako ta jednadžba nosi ime po Laplaceu, bila je poznata i prije njega. U matematici u *Mécanique Céleste* vidi se i jak utjecaj dva velika Laplaceova suvremenika: Lagrangea i Legendrea. Iako jako značajno djelo, *Mécanique Céleste* je teška za čitanje, a mnogi detalji su neobjašnjeni. Tu se prvi put pojavljuje formulacija, koja je kasnije postala popularna u matematičkim tekstovima, „Lako se vidi". Laplace ju je koristio na više mjesta gdje je bio uvjeren u točnost svojih rezultata, ali ih nije znao – ili htio – obrazložiti.

Kako je Napoleonova moć rasla, Laplace se sve više odricao ranijih republikanskih načela. Kad je Napoleon 1799. postao prvi konzul, Laplace je postao ministar unutarnjih poslova, no za to se pokazao neprikladnim te je smijenjen već nakon šest tjedana. Napoleon je kasnije ironično komentirao, aludirajući na Laplaceove uspjehe u infinitezimalnom računu, da je Laplace „unio duh beskonačno malog u državnu upravu". Usprkos neuspjehu na mjestu ministra unutarnjih poslova, Laplace je dobio mjesto u Senatu. U predgovoru trećem dijelu *Méchanique céleste* Laplace piše da je od svih u tom djelu iznesenih istina, autoru tj. njemu najvrednija njegova predanost mirotvorcu Europe. Tu je posvetu u kasnijim izdanjima, nakon što je Napoleon izgubio vlast, uklonio. Godine 1805. dobiva orden Legije časti a 1806. postaje plemić s titulom *Compte de l'Empire*. Kao senator, 1814. je glasovao za smjenu Napoleona i povratak dinastije Bourbona. Kako su na to slijedili znamenitih sto dana Napoleona, Laplace se našao u neugodnoj poziciji te je napustio Pariz do konačnog Napoleonova poraza. Nakon tog ostao je vjeran dinastiji Bourbona, ali nepopularan u političkim krugovima. Godine 1817. kralj Louis XVIII iz dinastije Bourbona imenovao ga je markizom. Svoje je zadnje političke prijatelje izgubio 1826., kad je odbio potpisati Akademijin dokument podrške slobodi novina.

Za matematiku, Laplace je najznačajniji po svojim rezultatima u teoriji vjerojatnosti. Prvo izdanje njegove *Théorie Analytique des Probabilités* objavljeno je 1812., a drugo izdanje objavljeno je 1814. U ovom se djelu može naći definicija vjerojatnosti: ukoliko u nekom pokusu imamo konačno mnogo mogućih ishoda od kojih je jedan nazvan događajem A, vjerojatnost događaja A jednaka je broju povoljnih slučajeva za A podijeljenom s brojem svih mogućih ishoda pokusa. Tu se koristi pretpostavka da su svi ishodi jednako vjerojatni[4]. Nadalje, tu su i pravila za račun s vjerojatnosti, zatim Bayesovo pravilo (koje je ime dobilo mnogo kasnije), metode nalaženja vjerojatnosti složenih događaja, opis i dokaz metode najmanjih kvadrata (koju su empirijski oko 1800. dobili Gauss i Legendre), primjene vjerojatnosti na smrtnost, pravo i očekivano trajanje života i braka, kao i napomene o moralu i matematičkom očekivanju. U kasnijim se izdanjima u dodacima nalaze i druge primjene vjerojatnosti, npr. na određivanje masa Jupitera, Saturna i Urana. Tako je Laplace na osnovi raspoloživih rezultata astronomskih mjerenja putanje Saturna dobio procjenu njegove mase, te je izjavio da se kladi „11000 naprema 1 da greška u ovom rezultatu nije veća od stotine njegova iznosa". Laplace bi dobio okladu, jer se 150 godina kasnije na osnovi novih mjerenja rezultat morao ispraviti za samo $0,63\%$!

Najpoznatiji Laplaceov rezultat iz teorije vjerojatnosti je **Laplaceov centralni granični teorem** koji proširuje de Moivreov na slučajeve kad vjerojatnost uspjeha p i neuspjeha q nisu jednake. Funkcija gustoće normalne

[4]Vidi se da je Laplaceova, tzv. klasična, definicija vjerojatnosti cirkularna: vjerojatnos događaja definira se uz poznavanje jednake vjerojatnosti ishoda pokusa.

razdiobe ima formulu $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Pritom je μ prosječni rezultat, a σ^2 je varijanca (prosjek kvadrata razlike između stvarnog i prosječnog rezultata). Dok je n konačan vrijedi $\mu = np$ i $\sigma^2 = npq$.

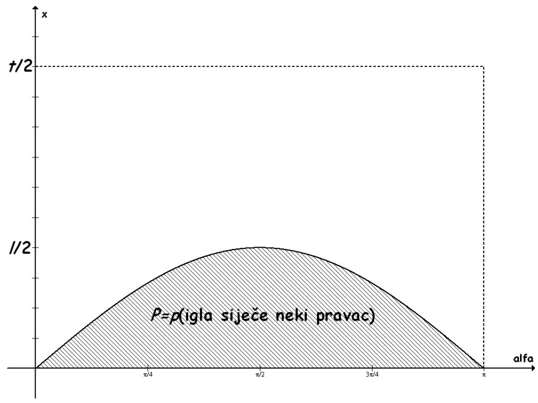
U istom se djelu može naći i znameniti **Buffonov problem**, nazvan po Georgeu Louisu Leclercu Buffonu (1707. - 1788.) koji se bavio geometrijskom vjerojatnosti. Problem se sastoji u određivanju vjerojatnosti da u pokusu bacanja igle na papir na kojem je nacrtan sustav ekvidistantnih paralelnih pravaca igla siječe neki od pravaca na papiru. Udaljenost među bilo koja dva susjedna pravca jednaka je duljini igle. Ovaj problem daje eksperimentalni način za određivanje broja π. Rješenje je kako slijedi: Nakon pada, položaj igle je potpuno određen s dva podatka: udaljenosti središta igle do bližeg pravca (x) i kutem α između smjera pravaca i igle. Neka je duljina igle l, a razmak između po dva susjedna pravca $t \geq l$. Tada je u svakom od n pokusa rezultat opisan parom (α_n, x_n) gdje je $\alpha_n \in [0, \pi]$, $x_n \in [0, t/2\rangle$. Svi mogući ishodi su stoga opisani pravokutnikom širine π i visine $t/2$, kojeg možemo shvatiti kao dio koordinatne ravnine (u kojoj na apscisu nanosimo α, a na ordinatu x). Koji dio pravokutnika odgovara uvjetima problema tj. za koje α i x igla siječe neki pravac? Igla siječe neki pravac točno ako je $x \leq \frac{l \sin\alpha}{2}$. Prema tome su povoljni slučajevi oni koji se nalaze između osi apscise i sinusoide $x = \frac{l}{2}\sin\alpha$ za $\alpha \in [0, \pi]$. (vidi sliku 2.11). Stoga je tražena vjerojatnost omjer površine ispod te sinusoide i čitavog pravokutnika:

$$p = \frac{\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\alpha d\alpha}{t\pi} = \frac{-\cos\alpha \mid_0^\pi}{\pi} = \frac{2l}{t\pi}.$$

Za slučaj da je $l = t$, imamo dakle $p = 2/\pi$ pa pema zakonu velikih brojeva slijedi da će za velik broj pokusa relativna frekvencija događaja „igla siječe neki od pravaca" biti aproksimacija broja $\frac{2}{\pi}$.

Ovakvim modelima Laplace započinje korištenje matematičkih modela koji za razliku od diferencijalnih jednadžbi nisu deterministički. Danas je Laplaceov način razmišljanja standard za teoriju vjerojatnosti: pod vjerojatnosti slučajnog događaja podrazumijevamo da se pokus može izvesti proizvoljno mnogo puta, da se u svakoj izvedbi pokusa traženi događaj desi ili ne, te da je pri velikom broju pokusa relativna frekvencija približno jednaka nekoj (općenito nepoznatoj) vrijednosti p koju zovemo vjerojatnost promatranog događaja.

Laplace argumentira i da je namjera vjerojatnija od slučajnosti (npr. veća je vjerojatnost da se iz danog skupa slova složi riječ koja nešto znači u nekom jeziku, nego da je poredak slova dao besmislenu riječ). Ako je za neki događaj vjerojatnost $\frac{1}{m}$ ako je slučajan, a $\frac{1}{n}$ ako se desio s nekom namjerom koja ga je potakla, vjerojatnost da postoji namjera je $\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = \frac{1}{1+\frac{n}{m}}$, što raste s m, a



Slika 2.11: Rješenje Buffonovog problema.

Slika 2.12: Siméon-Denis Poisson, 19. st.

pada s n.

Godine 1837. **Siméon-Denis Poisson** (1781. - 1840.) uvodi **Poissonovu razdiobu** i naziv „zakon velikih brojeva”. Poissonova razdioba od koristi je za pokuse koji se ponavljaju jako puno puta, a u kojima je vjerojatnost uspjeha vrlo mala. U takvom slučaju rad s binomnom razdiobom postaje prekompliciran. Poissonova razdioba opisuje vjerojatnost da će se neki broj događaja dogoditi u fiksnom vremenskom periodu, ako je poznata prosječna učestalost uspjeha λ ($\lambda = np$ gdje je n broj pokusa, a p vjerojatnost uspjeha u pojedinom pokusu) i ako se promatrani događaji događaju neovisno o vremenu koje je prošlo od zadnjeg događaja. Promatramo li limes binomne razdiobe $B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ kad $n \to +\infty$, dobivamo vjerojatnost točno k uspjeha u promatranom vremenskom intervalu:

$$\psi_\mu(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Poissonov otac je bio vojnik, koji je nakon penzioniranja radio kao činovnik u selu u kojem je Poisson rođen. Za vrijeme revolucije preuzeo je vlast u mjestu. Dijete je predano na odgoj dadilji, a Poisson je pričao kako ga je otac našao jednom prilikom kad je dadilja otišla u izlazak zavezanog konopcem za čavao u zidu. Poisson je toj priči obično dodavao kako je pokušavajući se osloboditi išao s jedne strane na drugu i tako već kao malo dijete počeo proučavati njihalo, jedan od njegovih kasnijih glavnih interesa. Odgojio ga je otac s ciljem da postane liječnik. Nakon neuspjelog pokušaja liječenja nakon kojeg je pacijent umro, Poisson odlučuje ne postati liječnik. Sa sedamnaest odlazi na *École Polytechnique*. Tokom života promijenio je dosta mjesta profesure i vladinih znanstvenih pozicija. Bio je lagano socijalistički orijentiran, ali nije aktivno sudjelovao u politici. Napisao je više od 300 znanstvenih radova. Od razultata u čistoj matematici, najvažniji su oni o određenim integralima, Fourierovim redovima, te vjerojatnosti. No, glavnina njegovih djela obrađuje primjene u raznim granama fizike.

2.3 Nastanak statistike

Već spomenuti Thomas Bayes prvi je formulirao osnovni problem matematičke statistike: kako iz opažanja (rezultata pokusa) doći do zaključka o nepoznatim razdiobama vjerojatnosti.

Poticaj za razvoj statistike došao je iz astronomije. Naime, da bi izračunali putanje nebeskih tijela, astronomi su se morali osloniti na podatke koji nisu bili sasvim pouzdani i postavljalo se pitanje kako iz tih podataka dobiti što točnije rezultate i procjene. Rješenje je bilo nalaženje krivulje koja uravnotežuje greške mjerenja. Godine 1805. **Legendre** otkriva **metodu najmanjih kvadrata**, a 1809. **Gauss** objavljuje gotovo identičnu metodu za koju tvrdi da ju je koristio od 1795., što je dovelo do rasprave o prvenstvu između Legendrea i Gaussa. Sigurno je da je 1801. metodom najmanjih kvadrata Gauss točno procijenio putanju tad nedavno otkrivenog planetoida Ceresa. Uz to, Gauss je pokazao da se razdioba grešaka mjerenja raspoređuje prema **Gaussovoj krivulji** tj. krivulji normalne razdiobe. Zato je danas često ime za normalnu razdiobu Gaussova razdioba. Ona iskazuje jednostavnu zakonitost: prosječno promatranje daje najvjerojatniji rezultat.

Gaussov rezultat je pojačao **Laplace** : neovisno o tom kakva je razdioba grešaka u pojedinim mjerenjima, njen prosjek uvijek teži normalnoj razdiobi. Laplace daje i formalni dokaz metode. Gaussovim i Laplaceovim rezultatima otvoren je put teorije vjerojatnosti u astronomiju.

Za povezivanje statistike, koja se razvila za astronomske potrebe, i društvenih fenomena zaslužan je belgijski matematičar i astronom **Lambert Adolphe Jaques Quetelet** (1796. -1874.). Ne temelju koncepta normalne razdiobe razvio je konstrukciju „prosječnog čovjeka” oko kojeg se po pravilima nor-

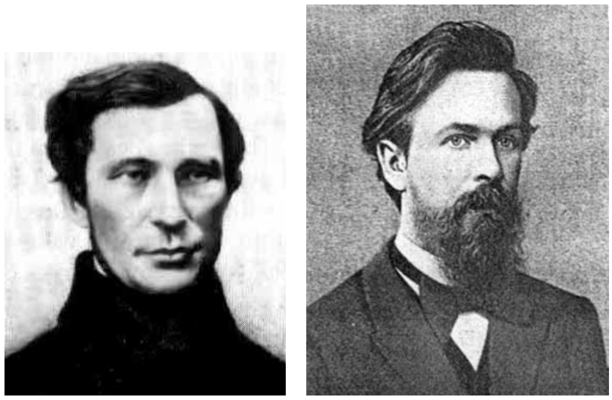
Slika 2.13: Lambert Adolphe Jaques Quetelet, 19. st.

malne razdiobe grupiraju osobine stvarnih ljudi. Odmake od te teoretske norme uzima kao „greške". Quetelet je smatrao dužnošću države da skuplja i analizira demografske podatke kako bi se otkrile društvene zakonitosti kao što su otkrivene i fizikalne. Kao dokaz za svoj koncept navodi da su natalitet, mortalitet, broj vjenčanja i stopa kriminala različiti u različitim državama, ali unutar jedne države ostaju godinama stabilni. Takve su se tablice izrađivale još od 17. stoljeća i npr. tablice smrtnosti su se koristile za izračunavanje životnog osiguranja (koje je u biti oklada između osiguravajućeg društva i osiguranika koju on dobiva ako umre prije roka). Ipak, statistika kao zasebna disciplina, kombinacija vjerojatnosti sa skupljanjem podataka, s primjenom u društvenim znanostima nastaje djelovanjem Queteleta i suvremenika, među kojima treba istaknuti i Darwinova rođaka Francisa Galtona (1822. -1911.) koji je primijenio statističke metode na nasljedna svojstva i time stvorio temelje znanosti o nasljeđivanju i biometrike. Godine 1853. Quetelet je organizirao i prvi međunarodni statistički kongres.

2.4 Aksiomatizacija teorije vjerojatnosti

Pafnuti Lvovič Čebišev (1821. -1894.) je prvi veliki ruski vjerojatnosničar; njegov zakon velikih brojeva je generalizacija Bernoullijevog. Njegov učenik **Andrej Andrejevič Markov** (1856. - 1922.) je utemeljio teoriju Markovljevih lanaca, tj. nizova međusobno zavisnih slučajnih varijabli. Markov je promatrao slijedove slova u *Evgenij Onjeginu* i vjerojatnost pojave samoglasnika iza suglasnika. Time je utemeljio teoriju stohastičkih procesa u kojima se u svakom trenutku stanje sustava mijenja na slučajan način. Tipičan primjer takvih procesa je šetnja pijanca u $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: pratimo koordinate pozicija pijanca koji kreče iz ishodišta i u svakom trenutku na slučajan način ide na jedno od četiri moguća susjedna mjesta.

Osnovni problem teorije vjerojatnosti na prijelazu 19. u 20. stoljeće bio



(a) (b)

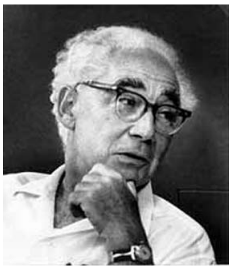
Slika 2.14: Pafnuti Lvovič Čebišev, 19. st., i Andrej Andrejevič Markov, 19./20. st.

Slika 2.15: Andrej Nikolajevič Kolmogorov, 20. st.

je nedostatak egzaktne osnove. Klasična definicija *a priori* vjerojatnosti kao broja povaljnih podijeljenog s brojem mogućih slučajeva ako su svi jednako vjerojatni je definicija cirkularna (što znači „jednako vjerojatni"?). Problem je razriješio 1933. **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (1903. - 1987.). Kolmogorov na temelju teorije mjere i po uzoru na teoriju skupova aksiomatizira vjerojatnost. Uveo je prostor vjerojatnosti $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je Ω skup svih elementarnih događaja, $\mathcal{F}$ skup složenih događaja $(\Omega, \emptyset \in \mathcal{F})$ i $P : \mathcal{F} \to \mathbf{R}$ vjerojatnost te vrijede aksiomi

- $\forall X \in \mathcal{F} \quad P(X) \geq 0$
- $P(\Omega) = 1$
- ako se $A, B \in \mathcal{F}$ međusobno isključuju ($A \cap B = \emptyset$), onda je $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (zapravo: za proizvoljnu familiju međusobno disjunktnih dogaјaja je vjerojatnost njene unije jednaka zbroju vjerojatnosti pojedinih događaja).

Kolmogorov je bio vanbračno dijete. Majka plemićkog porijekla umrla je pri porodu, otac je do revolucije bio u egzilu (i poginuo 1919.) te ga je odgojila teta. Nakon školovanja neko vrijeme je radio kao kondukter na željeznici, a zatim se 1920. upisao moskovsko sveučilište. Studirao je matematiku, metalurgiju i rusku povijest. Iz matematike je kao učitelje imao niz istaknutih matematičara te se već od 1922. intenzivno bavio matematikom. Prvi interesi su mu bili matematička analiza i teorija mjere. Diplomirao je 1925., a dotad je napisao već osam znanstvenih članaka. Iste godine piše i prvi članak o vjerojatnosti. Doktorirao je 1929., a 1931. postaje profesor na moskovskom sveučilištu. Znamenitu monografiju *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* objavio je 1933. U tom je djelu aksiomatizirao vjerojatnost. Temelje teorije Markovljevih procesa postavio je 1938. Bavio se i funkcionalnom analizom, osnovama geometrije, topologijom, teorijom aproksimacija, poviješću i metodikom matematike. Od 1935. živio je s prijateljem, topologom P. S. Aleksandrovim, u Komarovki, a njihov dom postaje okupljalište niza značajnih sovjetskih matematičara. Godine 1939. postao je član sovjetske Akademije znanosti. Oženio se 1942. Kasnije se bavio i primjenama matematike, osobito teorije vjerojatnosti, u fizici i astronomiji. Zalagao se za posebno obrazovanje nadarene djece. Tokom karijere bio je na nizu pozicija na moskovskom sveučilištu. Dobio je niz priznanja (član sovjetske Akademije znanosti, Lenjinova nagrada, Lenjinov red, nagrada Lobačevski, član rumunjske Akademije znanosti, londonskog kraljevskog statističkog društva, njemaˇke Leopoldina akademije, Akademije



Slika 2.16: Vilim (William) Feller, 20. st.

znanosti i umjetnosti SAD, London Mathematical Society, američkog filozofskog društva, indijskog statističkog instituta, nizozemske Akademije znanostiu, londonskog Royal Society, Nacionalne akademije SAD, francuske Akademije znanosti, niz počasnih doktorata). Imao je i mnogo nematematičkih interesa, a osobito se zanimao za Puškinovu poeziju.

Za kraj spomenimo istaknutog hrvatskog vjerojatnosničara, zagrepčanina židovskog porijekla **Williama Fellera** (1906. - 1970.), koji je od 1939. djelovao u SAD. U svoje doba bio je jedan od najznačajnijih vjerojatnosničara izvan SSSR-a. Osobito je doprinijeo povezivanju Markovljevih lanaca i diferencijalnih jednadžbi.

Poglavlje 3

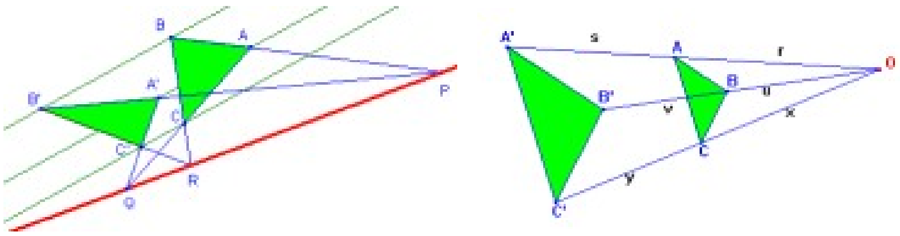
Razvoj geometrije nakon renesanse

3.1 Otkriće projektivne i nacrtne geometrije

Nakon srednjevjekovnih arapskih dostignuća, sve do sedamnaestog stoljeća nije bilo bitnih otkrića na području geometrije, izuzevši renesansnih rezultata o perspektivi za slikarstvo. No, geometrija perspektive je u biti projektivna geometrija. Nju je prvi formalno proučio **Girard Desargues** (1591. - 1661.). Desargues je po struci bio inžinjer i arhitekt, ali s velikim interesom za matematiku. Bio je iz ugledne obitelji, a kao inžinjer bio je savjetnik znamenitog kardinala Richelieua te je za vrijeme opsade La Rochellea susreo Descartesa. Bio je član Mersenneovog kruga u kojem su bili i Descartes i Pascal.

Desargues je ideje projektivne geometrije najvjerojatnije dobio baveći se perspektivom. Njegovo glavno djelo *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* o projektivnoj geometriji izdano je 1639., no tiskano je u malo primjeraka koji su svi nestali dok jedan nije otkriven 1951. Dotad je Desarguesovo djelo ostalo poznato samo kroz jednu kopiju u obliku manuskripta. Radi se o jako sažetom djelu kompliciranom za čitanje te dugo vremena nije imalo bitan utjecaj. Desargues kreće od poistovjećivanja točaka na suprotnim krajevima pravca (obje su beskonačno daleke). Nadalje uzima da se svi međusobno paralelni pravci sijeku u beskonačno dalekoj točki, a sve takve beskonačno daleke točke čine jedan beskonačno dalek pravac kojeg svaki pravac siječe u točki koja odgovara njegovom smjeru. Međusobno paralelne ravnine sijeku se u beskonačno dalekom pravcu. Kao i u običnoj euklidskoj geometriji, svake dvije točke jedinstveno određuju pravac i postoje četiri točke od kojih nikoje tri nisu

Slika 3.1: Girard Desargues, 17. st.



(a) (b)

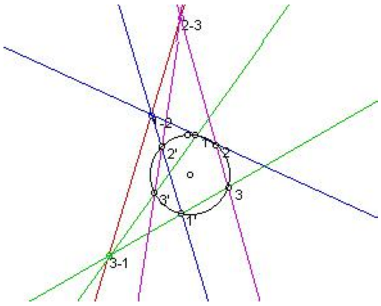
Slika 3.2: Desarguesov teorem.

kolinearne. Tangenta je granični slučaj sekante na krivulju, a asimptota je tangenta u beskonačnosti. Detaljno je obradio konike (paralelno sve tri vrste, a ne svaku zasebno) konzistentno koristeći beskonačno daleke objekte i analizirajući svojstva koja se ne mijenjaju pri projiciranju. Dokazao je i osnovne teoreme o involuciji, homologiji, polovima i polarama. Najznamenitiji je njegov teorem (objavljen 1648.):

Teorem 1 (Desargues) *Neka su dani trokuti ABC i $A'B'C'$. Ako se pravci AA', BB' i CC' sijeku u jednoj točki (eventualno beskonačno dalekoj)*[1] *onda su sjecišta AB s $A'B'$, AC s $A'C'$ i BC s $B'C'$ kolinearna (eventualno određuju beskonačno daleki pravac: ako su AB i $A'B'$ te BC i $B'C'$ paralelne, onda je i AC paralelna s $A'C'$).*

Suosnivač projektivne geometrije je **Blaise Pascal** sa svojim *Essai pour les coniques* (1639., dakle napisan kad je imao šesnaest godina) i nekim kasnijim djelima. Kako se Pascal kretao u Mersenneovom krugu, u kojem je bio i Desargues, vjerojatno je da je Pascal bio pod njegovim utjecajem. Pascalov cilj bio je pojednostaviti svojstva konika. Među Pascalovim teoremima iz projektivne geometrije najznamenitiji je

[1] Ako za trokute vrijedi to svojstvo, kažemo da je jedan projekcija drugog.



Slika 3.3: Pascalov teorem o mističnom heksagramu.

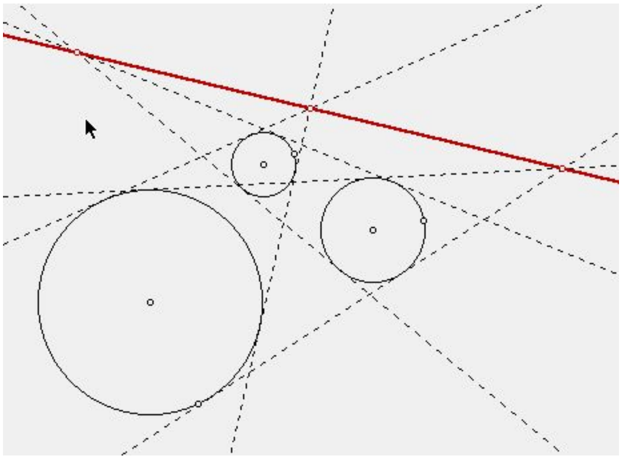
Slika 3.4: Gaspard Monge, 18./19. st.

Teorem 2 (Pascalov teorem o mističnom heksagramu) *Ako je u koniku upisan heksagram* $1231'2'3'$*, onda su sjecišta tri para nasuprotnih stranica (*$12'$ *s* $1'2$*,* $23'$ *s* $2'3$ *i* $13'$ *sa* $1'3$*) kolinearna.*

Budući se sve konike mogu projektivnim preslikavanjima dobiti iz kružnice, dovoljno je Pascalov teorem dokazati za kružnicu. U slučaju da je konika „degenerirana" tj. ako se radi o dva paralelna pravca na kojima su po tri točke heksagrama, kao specijalni slučaj Pascalova teorema dobije se Papusov teorem.

Posebna vrsta projektivne geometrije je nacrtna (deskriptivna) geometrija, koju je utemeljio **Gaspard Monge** (1746. - 1818.) svojim djelom *Géométrie descriptive* (1798.). Prije njega, prve ideje sličnog tipa pojavile su se u 17. i 18. stoljeću (de Bosse, Frézier). U Mongeovom se djelu nalaze teoremi o obliku i relativnoj poziciji geometrijskih tijela. Uveo je ravnine tlocrta i nacrta. Mongea se također smatra ocem diferencijalne geometrije jer je u svom djelu *Application de l'analyse a la géométrie* koristio primjenu infinitezimalnog računa na geometriju. U tom djelu je uveo pojam linija zakrivljenosti na plohi u trodimenzionalnom prostoru. Poznat je

Teorem 3 (Mongeov teorem) *Za tri disjunktne kružnice od kojih nikoja*



Slika 3.5: Mongeov teorem.

nije unutar neke od druge dvije vrijedi: ako je dan po jedan par neparalelnih tangenti na svaku od kružnica, sjecišta tih parova tangenti su kolinearna.

Po zanimanju, Monge je bio arhitekt. Kad je s osamnaest godina izradio plan grada, privukao je pozornost te se zaposlio kao crtač nacrta. Matematičke sposobnosti su mu priznate 1766. kad je razvio vlastitu geometrijsku metodu da obavi zadatak planiranja utvrde takve da neprijatelj, neovisno o svojoj poziciji, ne može vidjeti ni gađati vojne pozicije u njoj. Nakon toga, ubrzo je dobio posao profesora hidrodinamike. Monge se bavio i raznim područjima matematičke analize, kombinatorikom, fizikom, kemijom i metalurgijom. U trenutku izbijanja Francuske revolucije bio je jedan od vodećih znanstvenika u Francuskoj, a imao je iskustva i kao ispitivač mornaričkih kadeta. Politički, jako je podržavao Revoluciju. Sudjelovao je i u komisiji za određivanje mjernog sustava. Kad je 1792. proglašena Republika, Mongeu je ponuđeno mjesto ministra mornarice, no na tom poslu nije bio uspješan. Nakon osam mjeseci pokušaja ujedinjavanja suprotstavljenih interesa dao je ostavku. U sljedećem razdoblju Revolucije bavio se raznim vojnim projektima vezanim za oružje i eksplozive. Godine 1794. imenovan je u tijelo koje je trebalo osnovati *École Centrale des Travaux Publics* (kasnije poznata kao *École Polytechnique*). Na toj školi je zatim predavao nacrtnu i infinitezimalnu geometriju. Ta su predavanja osnova njegova djela *Application de l'analyse a' la géométrie* (1800.) kojim je utemeljio diferencijalnu geometriju. Nacrtnu geometriju je predavao i na *École Normale*, a borio se i za ponovno osnivanje u Revoluciji ukinute Akademije znanosti (ponovno otvorena 1795. pod imenom Nacionalni institut). Tokom 1796./7. boravio je u Italiji sa zadatkom

Slika 3.6: Jean Victor Poncelet, 19. st.

da odabere umjetnička djela za pobjedničku stranu u Francuskoj. Tu se sprijateljio s Napoleonom Bonaparteom. Po povratku u Pariz postao je direktor *École Polytechnique.* Na Napoleonov nagovor, sudjelovao je u egipatskoj ekspediciji 1798. Napoleon je Mongea imenovao predsjednikom Egipatskog instituta u Kairu. U Pariz se vratio 1799., nešto nakon Napoleona. Kad je Napoleon uspostavio Konzulat, imenovao je Mongea kao doživotnog senatora Konzulata. No Monge je zadržao znanstvene, osovito matematičke, interese i u ovom periodu i tek je 1809. prestao predavati kad mu je zdravlje oslabilo. Godine 1813. poslan je organizirati obranu Liegea za Napoleona, no morao je pobjeći. Ubrzo iza Napoleonove abdikacije vratio se u Pariz. Ostao je vjeran Napoleonu, podržavši ga 1815.; viđao je Napoleona sve do njegova ukrcaja na brod za Sv. Helenu. Ubrzo se Monge pobojao za svoj život te je napustio Francusku, a vratio se 1816. Dva dana po povratku izbačen je iz instituta *Institut de France*, bio je politički šikaniran i pod stalnim prijetnjama smrću. Kad je umro, usprkos inzistiranju vlasti da mu se ne oda počast, studenti *École Polytechnique* su je ipak odali.

Projektivna geometrija isprva nije privukla mnogo pozornosti. Jedan od glavnih razloga bila je istovremena pojava analitičke geometrije, koja je imala bitno više očiglednih primjena. Uz to, zbog nedostupnosti i teške čitljivosti Desarguesovih spisa, njegovi su rezultati ostali gotovo nepoznati do 19. stoljeća kad je 1822. Mongeov učenik **Jean Victor Poncelet** (1788. - 1867.) objavio svoje djelo o projektivnoj geometriji. Poncelet je bio vojni inžinjer u Napoleonovoj vojsci i pri povlačenju iz Moskve 1812. je ostavljen kao mrtav te je zarobljen. U dvije godine zarobljeništva je napisao svoje spomenuto djelo o geometriji, ne samo projektivnoj, koje će dugo godina biti jedan od najpoznatijih geometrijskih udžbenika. Uveo je projektivni prostor nad realnim i nad kompleksnim brojevima. Uveo je i polove i polare konika te tako otkrio princip dualnosti među točkama i pravcima u projektivnoj ravnini. **Karl von Staudt** (1798.-1867.) je 1847. oslobodio projektivnu geometriju svake metrike. On je kao bitno svojstvo uzeo samo incidenciju, a udaljenosti, kutevi

Slika 3.7: Marin Getaldić, 16./17. st.

i druge geometrijske mjere se ignoriraju.

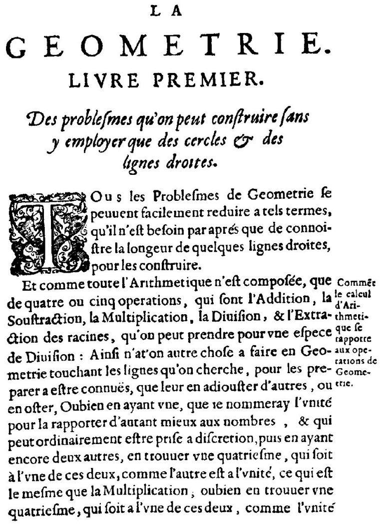
3.2 Otkriće analitičke geometrije

Još od antičkog doba bilo je uobičajeno algebarske probleme svoditi na geometrijske. Kasnije su postojali pokušaji obrnutog pristupa, no većih uspjeha nije bilo. Prije Descartesa, najbliže otkriću analitičke geometrije došao je Dubrovčan **Marin Getaldić** (1566. - 1626.). Matematički pod jakim utjecajem Viètea, 1607. je napisao prvo djelo s primjenom algebre na geometriju, a 1630. svoje najvažnije matematičko djelo *De resolutione et compositione mathematica*. Getaldić je bio iz aristokratske obitelji, a opisan je kao „čovjek s moralom anđela". U razdoblju 1595. - 1601. putovao je po Evropi i ostvario kontakte s najvećim znanstvenicima svog vremena, među inim i s Galileom.

Glavna prepreka uvođenju analitičke geometrije bilo je standardno fizičko interpretiranje potencija (prva potencija je dužina, druga je površina, treća je volumen). Konačni korak i otkriće analitičke geometrije postiže **René Descartes** (1596. - 1650.) prilogom *La Géométrie* u svom djelu *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences* iz 1637. Prema anegdoti, Descartes je inspiraciju za uvođenje koordinatne ravnine dobio promatrajući muhu na stropu. Ime je analitičkoj geometriji dao Newton: pod njome Newton podrazumijeva proučavanje geometrijskih likova pomoću algebarskih jednadžbi.

Descartes se odmiče od spomenute interpretacije kvadrata i kubova brojeva: kod njega su a, a^2 i a^3 duljine. Dakle x^2 nije površina, već broj kojem geometrijski odgovara jednodimenzionalni objekt: parabola. Danas smo navikli vidjeti x^2 i gotovo i ne misliti na kvadrat kao geometrijski lik: to zahvaljujemo Descartesu. Time dobivaju smisao i jednadžbe s x^n za $n > 3$. Također, sad se može konstruirati kubna jednadžba, a ne samo njena rješenja pomoću konika kako je to radio Omar Khayyam (11./12. st.). Descartes želi pomoću algebre rješavati geometrijske probleme i paralelno promatra alge-

(a)



LA

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

Tous les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

(b)

Slika 3.8: René Descartes (17. st.) i prva stranica njegove *La Géométrie* (1637.)

barsku i geometrijsku analizu problema. Revolucionarna je njegova ideja da se svaka točka u ravnini može jednoznačno prikazati kao par realnih brojeva x i y koji opisuju udaljenosti te točke od dva fiksna, međusobno okomita pravca. Uočio je i da jednadžbe $f(x,y)=0$ mogu biti neodređene (imati beskonačno mnogo rješenja), ali se ta rješenja mogu opisati kao koordinate točaka koje čine neku krivulju – kažemo da je $f(x,y)=0$ jednadžba te krivulje. Posljedica gornje ideje je da se pravci mogu predstaviti kao skupovi točaka (x,y) koje zadovoljavaju $ax+by+c=0$, a konike kao skupovi točaka (x,y) koje zadovoljavaju $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$. Općenito krivulje zadovoljavaju jednadžbe oblika $f(x,y)=0$ tj. takve jednadžbe opisuju neko geometrijsko svojstvo. Descartes komentira i da bi se iste ideje mogle primijeniti u prostoru korištenjem tri koordinate, no tu ideju nije dalje razradio.

Descartesova *La Géométrie* se sastoji od tri dijela. U prvom se objašnjavaju principi analitičke geometrije i diskutira jedan Papusov zadatak, a koji je specijalni slučaj Apolonijeva problema. Posjetimo se da je upravo Apolonije točke na koniki povezivao tetivama paralelnim nekom promjeru, čije duljine su određene položajem točke na promjeru, te je tako imao rani oblik kosokutnog koordinatnog sustava. **Apolonijev problem** se sastoji u pronalaženju geometrijskog mjesta točaka koje imaju svojstvo da je omjer produkta udaljenosti točke do nekih m pravaca i produkta udaljenosti do nekih drugih n pravaca konstatan. U antici su riješeni slučajevi $m = n = 1$ i $m = 1$, $n = 2$, a Papus je bez dokaza naveo da je za $m = n = 2$ rješenje konika. Da bi riješio taj problem Descartes uvodi koordinate i pokazuje da je jednadžba krivulje za taj slučaj jednadžba drugog stupnja, što kako danas znamo predstavlja koniku.

U drugom dijelu *La Géométrie* Descartes dijeli krivulje na dvije klase: geometrijske i mehaničke. To odgovara kasnijoj od Newtona uvedenoj podjeli na algebarske i transcendentne. Descartesove geometrijske krivulje su one koje se mogu opisati kao geometrijsko mjesto sjecišta dva pravca koji se kreću paralelno svaki s po jednom od koordinatnih osi, i to brzinom koju možemo opisati kao algebarsku funkciju (npr. elipsa, cisoida). Ako ta brzina nije tako opisiva, tj. ako je za njen opis potrebno korištenje transcendentnih funkcija, Descartes krivulju zove mehaničkom (npr. cikloida, kvadratisa). U trećem dijelu *La Géométrie* nalazi se analiza tada poznate algebre.

Descartes se bavio i problemom tangente. Tada uobičajena definicija tangente bila je da je to pravac kroz točku na krivulji tako da se između njega i krivulje ne može povući nijedan drugi pravac. Descartes predlaže da se tangenta shvati kao granični slučaj sekante. Slično je tangentu definirao i Barrow. Descartes je razvio metodu za određivanje tangente i normale na krivulju koja se sastoji u pronalaženju kružnice koja u danoj točki dira krivulju i čija tangenta je jednaka traženoj tangenti. Vezano za tu ideju poznat je i Descartesov teorem, koji je specijalni slučaj rješenja Apolonijeva problema:

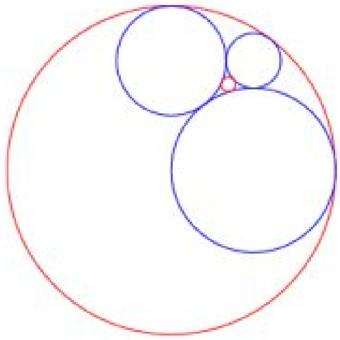
Teorem 4 (Descartes) *Za kružnicu polumjera r njezina zakrivljenost se definira kao $\kappa = \frac{1}{r}$. Ako su $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ zakrivljenosti četiri kružnice u ravnini od kojih se svake dvije dodiruju*[2]*, onda vrijedi*

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2.$$

Iz tog teorema slijedi: za tri kružnice od kojih se svake dvije dodiruju postoje dvije (zakrivljenostî $\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1}$) koje diraju sve tri (vidi sliku 3.9).

Descartes je bio iz ugledne obitelji. Bio je boležljivo dijete, a od osme godine odgojen u isusovačkoj školi. Usprkos stroge discipline, zbog slabog zdravlja imao je dozvolu ležati ujutro do 11 sati u krevetu. Taj je običaj i kasnije zadržao. Kad je posjetio Pascala 1647. rekao mu je da je jedini način za dobro raditi matematiku i sačuvati zdravlje ne dići se ujutro ranije nego što imaš potrebu da se digneš. Po završetku škole, 1612., Descartes odlazi u Pariz, gdje obnavlja svoje prijateljstvo iz djetinjstva s Mersenneom. Kad je

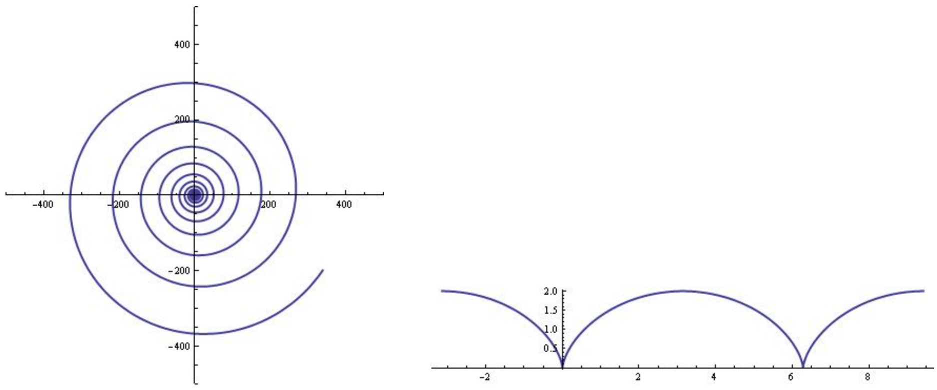
[2]Dvije krivulje se dodiruju ako u sjecištu imaju zajedničku tangentu.



Slika 3.9: Descartesov teorem.

morao birati zanimanje, za mladića iz ugledne obitelji poput njegove postojala su samo dva izbora: vojska ili crkva. Descartes 1617. odabire vojsku i odlazi u tridesetogodišnji rat, a svo slobodno vrijeme provodi baveći se matematičkim problemima i filozofijom. Prema njegovim riječima, svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10.11.1619., u doba ratovanja na Dunavu. Iz vojske izlazi 1621. te idućih pet godina provodi putujući i proučavajući matematiku. U Parizu se nastanjuje 1626. te se dvije godine kreće u društvu i bavi konstrukcijama optičkih instrumenata. Godine 1628. upoznaje kardinala de Bérullea, koji je toliko impresioniran Descartesom da ga nagovara da život posveti otkrivanju istine. Descartes pristaje te se, kako bi mogao voditi mirniji život, seli u Nizozemsku gdje će živjeti dvadeset godina potpuno posvećen filozofiji i matematici. Tu je napisao i svoje djelo *Discours de la méthode ...* o univerzalnoj znanosti. Godine 1649. poziva ga švedska kraljica Kristina kako bi ju podučavao matematiku. On prihvaća poziv, a ona zahtijeva ranojutarnju poduku te je Descartes, dotad naviknut do kasna jutra biti u krevetu, prisiljen u pet sati ujutro prolaziti hladan put iz jednog dijela dvorca u drugi. Tako je Descartes dobio upalu pluća i unutar dva mjeseca boravka u Stockholmu umro. Descartes ostaje jedan od najvećih filozofa i znanstvenika u povijesti, iako nije bio široko obrazovan jer je bio nesklon učenju koje ne daje konkretnu korist. Nikad se nije ženio i nema potomaka, iako je imao jednu vanbračnu kćer koja je rano umrla.

Kako smo već rekli, Descartes se bavio transcendentnim krivuljama, među inim logaritamskom spiralom i cikloidom. Descartes je prvi koji je opisao logaritamsku spiralu. **Logaritamska spirala** je poznata po svojoj vezi s Fibonaccijevim brojevima i zlatnim rezom. To je krivulja kod koje je za svaku njenu točku kut radijvektora s polarnom osi proporcionalan logaritmu duljine



(a) (b)

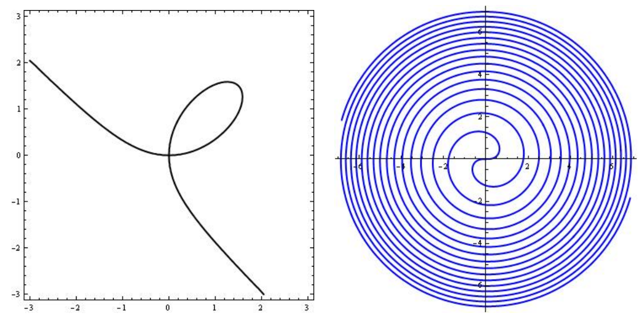
Slika 3.10: Logaritamska spirala i cikloida.

radijvektora (jednadžba logaritamske spirale u polarnim koordinatama je $r = ae^{b\phi}$). Nju je kasnije detaljno analizirao Jakob Bernoulli, koji je želio da mu bude uklesana u nadgrobni spomenik, no zabunom je uklesana Arhimedova spirala (njena jednadžba u polarnim koordinatama je $r = a\phi$).

Descartes se bavio konstrukcijom tangente na cikloidu. **Cikloida** je putanja točke na udaljenosti h od središta kružnice polumjera a koja se kotrlja po pravcu (parametarske jednadžbe ciklode su $x(t) = at - h\sin t$, $y = a - h\cos t$). Cikloidom su se bavili mnogi matematičari 17. stoljeća: Galileo, Mersenne, de Roberval, Pascal, Huygens... Mersenne je prvi definirao cikloidu (iako se prvi s njom bavio njemački filozof Nikolaus von Kues u 15. st.). Huygens ju je iskoristio u svojoj konstrukciji sata s njihalom. Cikloida naime ima svojstvo da ako točka klizi po njoj, gibat će se periodično pri čemu period ne ovisi o početnoj točki (svojstvo tautohrone). Huygens je otkrio to svojstvo cikloida (*Horologium oscillatorium*, 1673.) i konstruirao prvi sat s njihalom koji je imao ugrađen mehanizam koji je osigurava izohronost njihala tako što je prisiljavao njihalo da se njiše po rubu cikloide.

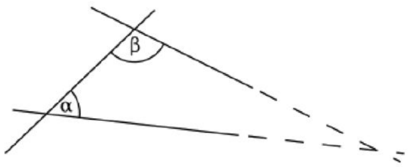
Po Descartesu je ime dobio **Cartesiusov list** kojem je implicitna jednadžba $x^3 + y^3 = 3axy$, no njegov oblik je Descartes krivo opisao: točno je opisao oblik lista u prvom kvadrantu, no pretpostavio je simetriju četvrtog reda, dok zapravo postoji samo jedan list i radi se o otvorenoj krivulji.

Suosnivač analitičke geometrije je **Pierre de Fermat** kod kojeg se analitička geometrija pojavljuje u članku *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* iz 1636., a prvi zapisi su i raniji. De Fermat daje jasan opis postavljanja jednadžbe geometrijskog mjesta i ima vrlo metodičan pristup. Uveo je neke uobičajene oznake i dao više varijanti jednadžbi konika. Uočio je (a Descartes



(a) (b)

Slika 3.11: Cartesiusov list i Fermatova spirala.

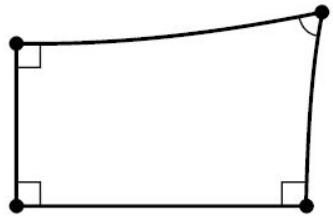


Slika 3.12: Peti Euklidov postulat.

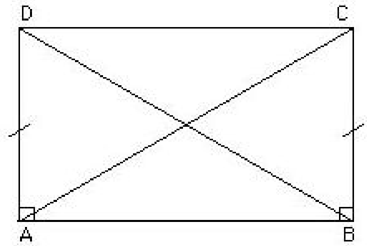
nije) da su za rješenje jednadžbe stupnja mn dovoljne krivulje m-tog i n-tog reda. Po de Fermatu se zove i **Fermatova spirala**, krivulja s polarnom jednadžbom $r^2 = a^2\varphi$ koju je Fermat analizirao 1636. godine. Kako smo već rekli u poglavlju o razvoju matematičke analize, de Fermat je razvio i metodu određivanja ekstrema i tangenti na krivulje (prije otkrića diferencijalnog računa). Kako je prigovorio da Descartes nije dobro izveo zakon loma svjetlosti, Descartes je, nakon saznanja za de Fermatove radove o ekstremima i tangentama koji su umanjivali važnost njegovih rezultata, napao de Fermatovu metodu određivanja tangente. Presudu u sukobu trebao je donijeti Desargues. De Fermat je uspio dokazati da je u pravu, a Descartes je priznao svoju grešku uz komentar da de Fermat isprva nije jasno objasnio o čemu se radi. Ipak, i kasnije je Descartes nastojao potkopati de Fermata.

3.3 Otkriće neeuklidskih geometrija

U *Euklidovim elementima* peti postulat (postulat o paralelama) kaže da ako transverzala dvaju pravaca čini zbroj kuteva s jedne od dviju strana manjim



(a)



(b)

Slika 3.13: Al-Haytham – Lambertov četverokut (lijevo) i Khayyam – Saccherijev četverokut (desno).

od dva prava kuta, onda se ti pravci sijeku, i to na toj strani na kojoj su ti kutevi. Tokom mnogih stoljeća matematičari su pokušavali dokazati da se radi o teoremu, a ne o aksiomu. Proklos u 5. stoljeću komentira krive pokušaje dokaza i daje svoj „dokaz”. Proklos je tako dobio ekvivalentnu formulaciju petog postulata: *Za dani pravac i točku izvan pravca kroz tu točku postoji točno jedna paralela s pravcem.* Ta je varijanta postulata o paralelama danas poznata kao **Playfairov aksiom**, po Johnu Playfairu (1748. - 1819.) koji je u svom komentaru *Euklidovih elemenata* iz 1795. predložio tu formulaciju umjesto originalne.

Među poznatim matematičarima koji su u doba srednjeg vijeka pokušavali dokazati peti postulat svakako treba istaknuti arapske matematičare al-Haythama (10./11. st.), Omara Khayyama (11./12. st.) i al-Tusija (13. st.). Al-Haythamov pokušaj dokaza ima sličnosti s Playfairovim aksiomom. On je prvi koji je opisao poznati **Lambertov četverokut** u kojemu su tri kuta prava, a jedan je šiljast. Omar Khayyam je pak prvi razmatrao **Saccherijev četverokut** koji ima dvije stranice iste duljine okomite na bazu. Al-Tusi je pak 1250. detaljno kritizirao postulat o paralelama i Khayyamov pokušaj dokaza te je pokušao dokazati taj postulat metodom „pretpostavimo suprotno”. Bio je jedan od prvih koji su razmatrali mogućnost eliptičke i hiperbolne geometrije, no obadvije je odbacio kao nemoguće.

Mnogi pokušaji dokaza petog postulata su dulje vrijeme smatrani uspješnim, no u svima su prije ili kasnije pronađene greške. Te greške su se većinom sastojale u pretpostavljanju nekog „očitog” svojstva, koje je zapravo ekvivalentno postulatu o paralelama. Tako je Wallisov „dokaz” iz 1663. dao idući ekvivalent postulata: *Za svaki trokut postoji proizvoljno velik njemu sličan trokut.* Takvi pokušaji dokaza su nesvjesno dali niz svojstava hiperboličkih i eliptičkih geometrija.

Jedan od takvih pokušaja pokazao se važnijim od drugih. Bilo je to 1697., a autor je **Girolamo Saccheri** (1667. - 1733.). U svom djelu *Euclides ab Omni Naevo Vindicatus* (1733.) on tvrdi da je dokazao peti Euklidov postulat. Važnost njegova pokušaja je posebno u tome da je pretpostavio neistinitost petog postulata i pokušao doći do kontradikcije. U Saccherijevom četverokutu $ABCD$ (vidi sliku 3.13 desno) je $|AD| = |BC|$. Saccheri uzima da su kutevi pri vrhovima A i B pravi. Tada su trokuti ABD i BAC sukladni prema SKS-teoremu o sukladnosti trokuta. Stoga su dijagonale AC i BD jednako duge. Po SSS-teoremu o sukladnosti trokuta slijedi da je trokut ADC sukladan trokutu BCD pa su kutevi pri C i D jednaki. Sad postoje tri mogućnosti:

- Oba kuta su tupi (to odgovara situaciji da je zbroj kuteva u trokutu veći od dva prava kuta);
- Oba kuta su šiljasti (to odgovara situaciji da je zbroj kuteva u trokutu manji od dva prava kuta);
- Oba kuta su pravi (to odgovara situaciji da je zbroj kuteva u trokutu jednak dva prava kuta).

Treći slučaj je ekvivalentan s Euklidovim petim postulatom, dakle ako pretpostavimo da on ne vrijedi, taj slučaj otpada. Iz prvog slučaja Saccheri dobiva postulat o paralelama, dakle kontradikciju s pretpostavkom. Za drugi slučaj je, nesvjestan što radi, dobio niz teorema neeuklidske geometrije, da bi na kraju dokazao prividnu kontradikciju: pokazao je da bi slijedilo da postoji beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku zadani pravac (postoji beskonačno mnogo paralela sa zadanim pravcem), što smatra nespojivim s prirodom pravca.

Relativno nepoznati matematičar **Georg Klügel** (1738. - 1812.) je u svojoj doktorskoj disertaciji 1763. analizirao 28 različitih pokušaja dokaza petog postulata, našao nedostatke u svima i zaključio da je moguće da ga se uopće ne može dokazati i da ga ljudi smatraju istinitim samo zbog toga na što ih njihova osjetila upućuju. Ta je ideja inspirirala mnoge druge matematičare da problemu pristupe drugačije tj. da pokušaju iznaći kakva bi to geometrija bila u kojoj peti postulat ne vrijedi.

Godine 1766. **Johann Heinrich Lambert** (1728. - 1777.), Eulerov i Lagrangeov kolega s berlinske Akademije znanosti, sličnim pristupom kao Saccheri uspijeva ne dobiti kontradikciju za slučaj šiljastih kuteva i uočava da bi u geometriji s takvim svojstvima vrijedilo da je što je trokut manje površine, zbroj kuteva veći (i bliži dva prava kuta). Kako prvi slučaj (slučaj tupih kuteva) vrijedi za geometriju na sferi, Lambert je imao ideju da bi

Slika 3.14: Johann Heinrich Lambert, 18. st.

drugi mogao vrijediti na sferi imaginarnog radijusa. U povijesti matematike Lambert je ostao poznat po dokazu iracionalnosti broja π. Pokazao je da su za racionalan broj $x \neq 0$ brojevi e^x i $tg\,x$ iracionalni, te jer je $tg\frac{\pi}{4} = 1$ slijedi da je π iracionalan. Postavio je i hipotezu da su π i e transcendentni, što su u 19. st. dokazali Ferdinand von Lindemann (za π) odnosno Charles Hermite (za e). Lambert je također prvi koji je sistematski analizirao hiperbolne funkcije.

Još jedan matematičar koji je dao jednostavan dokaz iracionalnosti broja π važan je i za povijest neeuklidskih geometrija: **Adrien-Marie Legendre** (1752. - 1833.) je četrdeset godina proveo radeći na postulatu o paralelama. Vjerovao je da je euklidska geometrija nešto očito i neupitno. Rezultat njegovih pokušaja dokaza je idući ekvivalent postulata o paralelama: *Zbroj kuteva u trokutu je dva prava kuta.* Kao i Saccheri sto godina ranije, oslanjajući se na beskonačnost pravaca, pokazuje nemogućnost zbroja kuteva većeg od dva prava kuta. Za dokaz nemogućnosti zbroja manjeg od dva prava kuta, Legendre pretpostavlja da je kroz svaku točku unutar kuta moguće povući pravac koji siječe oba kraka (tj. još jedan ekvivalent postulata o paralelama). Tako sredinom 18. stoljeća geometrija ostaje zapetljana u pokušajim dokaza Euklidova petog postulata, što d'Alembert 1767. naziva „skandalom elementarne geometrije".

Prvi koji je stvarno shvatio u čemu je problem bio je **Johann Karl Friedrich Gauss** (1777. - 1855.). On se petim postulatom bavio od svoje petnaeste godine, ispočetka pokušavajući postulat izvesti iz ostala četiri. Do 1817. Gauss postaje uvjeren u njegovu nezavisnost od ostala četiri postulata i pokušava izvesti posljedice geometrije u kojoj bi kroz zadanu točku postojalo više od jedne paralele sa zadanim pravcem. Gauss je ne samo smatrao da je takva geometrija moguća, nego je izrazio mišljenje da je to možda stvarna geometrija prostora. Kako u takvoj geometriji zbroj kuteva u trokutu ispada

Slika 3.15: János Bolyai, 19. st.

manji od dva prava kuta, Gauss je mjerio kuteve ogromnog trokuta (najdulja strana tog trokuta bila je duga 108 km) i dobio da je, uzevši u obzir eksperimentalnu grešku, zbroj kuteva 180° tj. nije uspio utvrditi kakva je geometrija prostora. Gauss svoje rezultate o geometriji u kojoj peti postulat ne vrijedi nikad nije objavio (vjerojatno jer je bio nesklon sukobima, a vjerojatno je smatrao da bi takvi rezultati podigli veliku prašinu u doba kad se neupitnim smatra da je euklidska geometrija jedina moguća). Ipak, o tim je rezultatima razgovarao s prijateljem matematičarem Farkasem Bolyaijem (1775. - 1856.), koji je sam imao nekoliko neuspješnih pokušaja dokaza postulata.

Farkas je svog sina Jánosa podučio u matematici, no savjetovao ga je da se ne bavi ovim problemom. **János Bolyai** (1802. - 1860.) se ipak odlučio baviti problemom i 1823. piše ocu: *Otkrio sam stvari tako divne da sam zaprepašten ... Iz ničega sam stvorio čudan novi svijet.* Dvije godine kasnije János te rezultate objavljuje na 24 strane dodatka očevoj knjizi (dodatak je objavljen prije knjige). Gauss je nakon čitanja tog spisa u pismu prijatelju Jánosa prozvao prvorazrednim genijem, ali samom Jánosu je rekao da je i sam to već otkrio, ali nije objavio, što je Jánosa dosta pogodilo.

János Bolyai nije dokazao postojanje nove geometrije: on je samo pretpostavio da peti Euklidov postulat ne vrijedi i izveo posljedice na sličan način na koji su to učinili oni koji su iz pretpostavka da peti postulat ne vrijedi željeli izvesti kontradikciju. Ipak, revolucionarna je ideja da je takva geometrija moguća. Njegova ideja neeuklidske geometrije sastojala se u tome da uzme krug u ravnini te pravcima smatra samo njihove dijelove unutar kruga. Tada za zadani pravac p i točku T unutar kruga očito postoji beskonačno pravaca kroz T koji ne sijeku p (unutar kruga). Danas je poznato da se „razumne" geometrije mogu dobiti točno uz jednu od te dvije pretpostavke: jedinstvenost pravca kroz T koji ne siječe p ili postojanje beskonačno mnogo pravaca kroz T koji ne sijeku p.

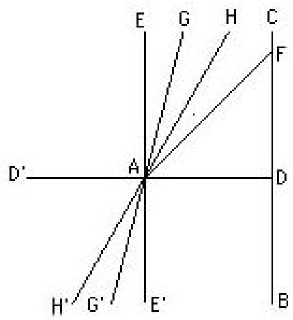
János Bolyai je rođen u Transilvaniji, tada dijelu Habsburške monarhije. S 13 godina je svladao diferencijalni račun i analitičku mehaniku. Bio je

Slika 3.16: Nikolaj Ivanovič Lobačevski, 19. st.

uspješan violinist i nastupao je u Beču. Studirao je u Beču te zatim pristupio vojnoj inžinjeriji i u njoj proveo jedanaest godina. Bio je poznat kao najbolji plesač i mačevalac u austrijskoj vojsci. Nije pušio ni pio, čak ni kavu, a govorio je devet stranih jezika (uključujući kineski i tibetanski). Nakon čestih groznica 1833. je otpušten iz vojske i povukao se na obiteljsko imanje. Tu je godinu kasnije počeo živjeti s Rozáliom Kibédi Orbán, s kojom je imao dvoje djece, ali se nikad nisu vjenčali jer je zakon zahtijevao novčani polog prije vjenčanja, a Bolyai nije bio dovoljno bogat. Prema nekim izvorima, János na nezadovoljstvo oca nije imao smisla za financije niti za održavanje obiteljskog imanja. U drugom razdoblju života i dalje se bavio matematikom te je u trenutku smrti (umro je od upale pluća u dobi od 57 godina) ostavio više od 20000 stranica rukopisa, iako osim spomenutog priloga očevoj knjizi druge rezultate nije objavio. Osim opisom neeuklidske geometrije istakao se i razvojem geometrijskog koncepta kompleksnih brojeva.

Uz iste pretpostavke kao Bolyai (zbroj kuteva u trokutu je manja od dva prava kuta) niz teorema neeuklidske geometrije dobio je **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1792. - 1856.). Bio je učenik jednog o rijetkih ljudi koji su znali Gaussove ideje o tome, Martina Bartelsa. Svoje rezultate objavio je 1829., no za to nisu znali ni Gauss ni Bolyai jer se radilo o članku na ruskom jeziku u lokalnoj sveučilišnoj publikaciji sveučilišta u Kazanu. Lobačevski je htio doseći i širu publiku, no Ostrogradski[3] mu je odbio članak. Godine 1840. objavio je knjižicu u kojoj na 61 strani detaljno opisuje principe neeuklidske geometrije. Dio toga je objavljen 1837. u časopisu *Crelle's Journal* te je time ipak dosegnut širi krug matematičke javnosti. Zanimljivo je da ni njegovi, kao ni Bolyaijevi, rezultati nisu privukli veću pozornost, upravo suprotno bojaznima Gaussa zbog kojih svoje rezultate na tu temu nije objavio. U spomenutoj knjižici Lobačevski Euklidov peti postulat zamjenjuje s **postulatom Lobačevskog**: *Postoje dva pravca paralelna zadanom pravcu kroz*

[3]Mihail Vasiljevič Ostrogradski, 1801. 1861., ruski matematičar koji je nezavisno od Greena otkrio Greenov teorem.



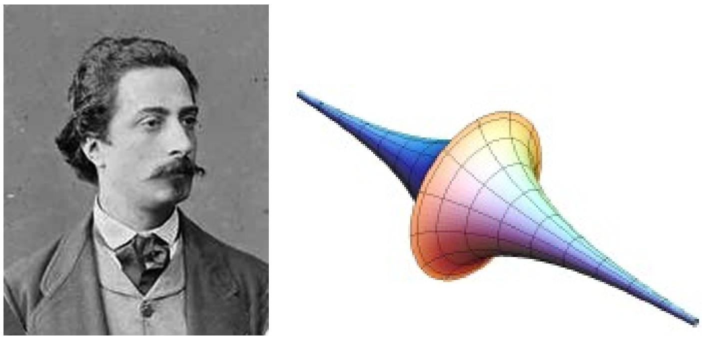
Slika 3.17: Dijagram Lobačevskog.

zadanu točku. Model kako bi ta geometrija funkcionirala bio je sljedeći: svi pravci zadane ravnine kroz jednu točku T podijele se u dva skupa, jedan onih koji sijeku zadani pravac p , a drugi onih koji ga ne sijeku (zamislivo ako uzmemo npr. ograničeni dio ravnine, vidi sliku 3.17). Tada postoje dva pravca koji čine rub između ta dva skupa i njih Lobačevski zove paralelama s pravcem p kroz točku T. Lobačevski je razvio i trigonometrijske identitete za trokute u svojoj geometriji i pokazao da ti identiteti teže k uobičajenima za male trokute. Danas geometriju tipa Bolyai-Lobačevski zovemo **hiperbolna geometrija**. U hiperbolnoj geometriji kroz svaku točku izvan pravca imamo bar dvije paralele s tim pravcem.

Lobačevski je bio iz siromašne obitelji i studirao je matematiku i fiziku u Kazanu, iako je isprva njegov interes bila medicina. Nakon studija postao je profesor u Kazanu, a od 1827. rektor koji je u svojih 19 godina provedenih na tom mjestu postigao velik napredak sveučilišta. S četrdeset godina se oženio mladom djevojkom iz bogate obitelji s kojom je imao sedmero djece, ali zapisi govore da je brak bio nesretan. Oko 1840. zdravlje mu je oslabilo od previše rada te se 1846. povukao u penziju. Nakon smrti najstarijeg sina bolest mu se pogoršala te je oslijepio. Zadnje godine života obilježene su i financijskim problemima.

Bernhard Riemann (1826. - 1866.), Gaussov doktorand, je u svom nastupnom predavanju 1854. reformulirao koncept geometrije kao prostor s dovoljno dodatne strukture da se mogu mjeriti veličine poput duljine. To je predavanje imalo velik utjecaj na razvoj različitih tipova geometrije. Riemann se bavio sfernom geometrijom u kojoj nema paralela tj. svaka dva pravca se sijeku.

Sredinom 19. stoljeća ipak i dalje postoji problem oko mogućnosti postojanja neeuklidskih geometrija: nije dokazano da je geometrija Bolyaija i Lobačevskog konzistentna, kao što to nije dokazano ni za euklidsku (s tom



(a) (b)

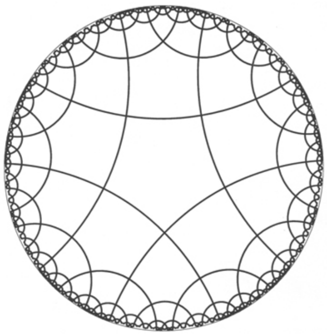
Slika 3.18: Eugenio Beltrami (19. st.) i pseudosfera.

razlikom da je zahvaljujući stoljetnoj tradiciji postojalo uvjerenje da u euklidskoj geometriji nema kontradikcija). Prvi koji je izjednačio neeuklidsku geometriju tipa Bolyai – Lobačevski s euklidskom bio je **Eugenio Beltrami** (1835. - 1900.). On je 1868. dao prvi model hiperbolne geometrije, točnije model dvodimenzionalne neeuklidske geometrije unutar trodimenzionalnog euklidskog prostora. U tom modelu, pravci hiperbolne geometrije su geodetske linije[4] na pseudosferi (pseudosfera je rotaciono tijelo koje nastaje rotacijom traktrise[5] oko svoje asimptote). Kasnije je dva druga poznata model hiperbolne geometrije dao **Jules Henri Poincaré** (1854. - 1912.). Osobito je poznat Poincaréov kružni model u kojem se gledaju točke unutar kruga, a pravci su dijametri kruga i lukovi kružnica koje sijeku rub kruga pod pravim kutem (misli se na dijametre i lukove koji su unutar kruga, bez rubnih točaka).

Usprkos nesavršenostima, Beltramijev model dao je bitan odgovor: postoji geometrija u kojoj vrijede prva četiri Euklidova postulata, ali ne vrijedi peti. Time je problem konzistencije aksioma neeuklidske (hiperbolne) geometrije sveden na problem konzistencije aksioma euklidske geometrije. Beltramijeve rezultate upotpunio je **Felix Klein** (1849. - 1925.). On je 1871. geometriji tipa Bolyai – Lobačevski dao ime hiperbolna geometrija. Dao je modele i drugih neeuklidskih geometrija, primjerice Riemannove sferne geometrije. Pokazao je da postoje tri osnovna tipa dvodimenzionalne geometrije. Jedan je geometrija tipa Bolyai – Lobačevski u kojoj pravci imaju po dvije beskonačno daleke točke, druga je Riemannova sferna u kojoj pravci

[4]Geodetske linije na plohi su krivulje koje daju najkraće puteve između dviju točaka na plohi.

[5]Traktrisa je krivulja zadana parametarskim jednadžbama $x(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}$, $y(t) = t - \operatorname{th} t$; y-os joj je asimptota.



Slika 3.19: Poincaréov kružni model hiperbolne geometrije.

nemaju beskonačno dalekih točaka (odnosno, imaju dvije imaginarne beskonačno daleke točke), a treća je euklidska, koja je rubni slučaj između prethodne dvije i u kojoj svaki pravac ima dvije podudarne (tj. jednu) beskonačno daleke točke. Ta tri tipa geometrije Klein redom naziva hiperbolnom, eliptičkom i paraboličkom. Konzistentnost aksioma euklidske geometrije dokazao je **David Hilbert** (1862. - 1943.), koji je 1899. dao novu aksiomatizaciju euklidske geometrije.

Poglavlje 4

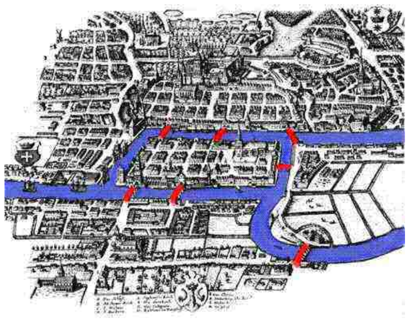
Nastanak topologije

Topologija je područje matematike koje se razvilo iz geometrije. Dok su karakteristični pojmovi u geometriji udaljenost i kutevi pa su stoga od interesa preslikavanja koja ih ne mijenjaju (izometrije), u topologiji su od interesa pojmovi poput povezanosti, broja rupa i sl. - svojstva koja se ne mijenjaju pod utjecajem topoloških preslikavanja (homeomorfizama). Pritom homeomorfizme možemo, bar u jednostavnijim slučajevima, zamišljati kao rastezanja, gnječenja, zavrtanja objekta koji im je domena (kao da je elastičan), ali tako da nije dozvoljeno rezanje, bušenje rupa ni lijepljenje. Formalno, homeomorfizmi su neprekidna preslikavanja s neprekidnim inverzima, a svojstva objekata koja se ne mijenjaju pod njihovim djelovanjem zovu se topološke invarijante. Primjer topološke invarijante je broj rupa na plohi.

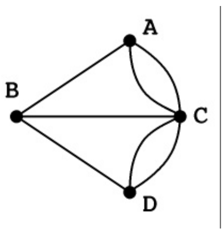
Primjer 2 *Poznat je vic da je topolog osoba koja ne razlikuje šalicu od donuta (američke krafne s rupom). Naime, kad bi šalica bila primjerice iz plastelina moglo bi ju se gnječenjem preoblikovati u donut bez da se pritom bušila nova rupa ili zatvorila stara. Zgodnu vizualizaciju te topološke ekvivalencije možete vidjeti primjerice na web-stranici* `http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/26/Mug_and_Torus_morph.gif`.

Uobičajeno je prvim topološkim teoremima zvati dva rezultata **Leonharda Eulera** u 18. stoljeću: rješenje problema Königsbergških mostova i Eulerovu poliedarsku formulu. Oba su vezana za područje topologije danas poznato kao teorija grafova. Teorija grafova se bavi problemima koji se mogu analizirati preko određenog broja točaka (vrhova) i spojnica među njima (bridova).

Problem Königsbergških mostova se sastoji u pitanju može li se svih sedam mostova u gradu Königsbergu (vidi sliku 4.1) obići tako da se svaki pređe točno jednom i da se vratimo na poziciju s koje smo krenuli. Godine



Slika 4.1: Problem Königsbergških mostova.

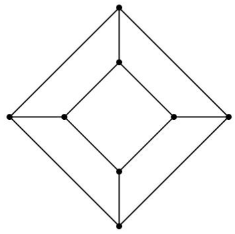


Slika 4.2: Graf problema Königsbergških mostova.

1736. Euler objavio je rješenje tog problema pod naslovom *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Iz naslova se vidi da je Euler bio svijestan da se radi o obliku geometrije u kojemu su udaljenosti nebitne. U članku se ne samo daje odgovor na pitanje može li se svih sedam mostova u gradu Königsbergu obići tako da se svaki pređe točno jednom, nego je dan i opći teorem tj. pravilo kako općenito riješiti takve probleme.

Problem možemo opisati pomoću grafa, tj. određenog skupa točaka koje zovemo vrhovi (u gornjem slučaju četiri vrha odgovaraju četirima područjima grada) i određenog skupa linija koje povezuju vrhove i zovu se bridovi (u gornjem slučaju bridovi predstavljaju mostove). Staza u grafu je niz tipa vrh-brid-vrh-brid-. . . -vrh u kom bridovi spajaju vrhove između kojih su navedeni, i to tako da se nikoji brid grafa u tom nizu ne pojavljuje dva ili više puta. Ako su početni i krajnji vrh jednaki, govorimo o zatvorenoj stazi ili turi. Tura odnosno staza je Eulerova ako sadrži sve bridove grafa. Eulerova staza je staza koja sadrži sve bridove grafa. Problem mostova u Königsbergu sad možemo izreći ovako: postoji li u grafu sa slike 4.2 Eulerova tura ili staza? Odgovor je: ne!

Teorem 5 (Eulerov teorem) *U grafu postoji Eulerova tura ako i samo ako su svi vrhovi grafa parnog stupnja. U grafu postoji Eulerova staza ako i samo*



Slika 4.3: Graf kocke ili općenitije četverostrane prizme.

ako su točno dva ili nijedan vrh neparnog stupnja. Pritom, stupanj vrha je broj bridova koji su incidentni s vrhom tj. koji se susreću u vrhu.

Nužnost uvjeta u teoremu je lako provjeriti: obilazeći graf u svaki vrh (osim eventualno početnog i krajnjeg ako ne tražimo turu nego stazu) moramo i ući i izaći, pa ako nijedan brid ne smijemo preći dvaput znači da se u svakom vrhu (osim eventualno početnog i krajnjeg) susreće paran broj bridova. U grafu problema mostova u Königsbergu svi su vrhovi neparnog stupnja pa ne postoji ni Eulerova staza ni Eulerova tura.

Godine 1750. Euler u pismu **Christianu Goldbachu**[1] navodi **Eulerovu poliedarsku formulu**: ako je V broj vrhova, B broj bridova i S broj strana poliedra, onda vrijedi

$$V - B + S = 2.$$

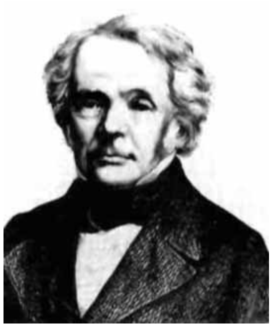
Primjer 3 *Kod kocke je* $V-B+S = 8-12+6 = 2$, *kod tetraedra* $V-B+S = 4-6+4 = 2$.

U terminima teorije grafova, Eulerova poliedarska formula kaže da za povezan planarni graf (graf je povezan ako postoji staza između svaka dva vrha, a planaran je graf koji se može nacrtati u ravnini tako da su mu jedina sjecišta bridova vrhovi) vrijedi navedena formula, pri čemu je S broj područja ravnine na koje je ravnina podijeljena crtežom grafa.

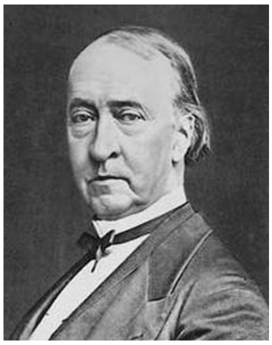
Primjer 4 *Graf svakog konveksnog poliedra je planaran. Pritom pod grafom poliedra podrazumijevamo graf kojem vrhovi i bridovi odgovaraju vrhovima i bridovima poliedra. Na slici 4.3 prikazan je graf četverostrane prizme.*

Detaljniju analizu formule Euler je objavio u dva članka 1752. Ipak, Euler je previdio da formula vrijedi samo za konveksne poliedre. To je uočio 1813.

[1] Christian Goldbach, 1690. - 1764., pruski matematičar, najpoznatiji je po do danas nedokazanoj hipotezi koju je postavio u jednom pismu Euleru, a to je da je svaki prirodan broj veći od 2 moguće napisati kao zbroj dva prosta broja.



(a)



(b)

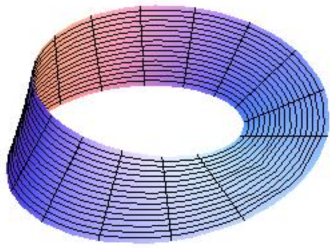
Slika 4.4: August Ferdinand Möbius i Johann Benedict Listing, 19. st.

Simon Antoine-Jean Lhuilier (1750. - 1840.), koji za poliedre s n rupa pokazuje da vrijedi $V - B + S = 2 - 2n$. Ekvivalentno je reći da ta jednakost vrijedi za sve grafove nacrtane na plohi s n rupa tako da im se bridovi sijeku samo u vrhovima. Broj $2 - 2n$ zove se Eulerovom karakteristikom plohe. Primjerice, Eulerova karakteristika sfere je 2, a Eulerova karakteristika torusa je 0. Eulerova karakteristika je prvi poznati primjer topološke invarijante.

Idući važan korak u razvoju topologije učinili su Möbius i Listing. **August Ferdinand Möbius** (1790. - 1860.) po majci je bio Lutherov potomak, a studirao je astronomiju, matematiku i fiziku kod Gaussa. Bavio se raznim granama geometrije. Godine 1865. opisao je Möbiusovu traku, prvu poznatu jednostranu i neorijentabilnu[2] plohu. Taj je opis nađen tek iza njegove smrti. Nešto ranije, 1861., tu je traku otkrio njemački matematičar češkog porijekla **Johann Benedict Listing** (1802. - 1882.). Listing je prvi koji koristi pojam topologija (njem. Topologie) 1847. u naslovu članka, ali i desetak godina ranije u komunikaciji. Möbiusova traka prikazana je na slici 4.5.

Teoriju grafova kao samostalnu matematičku disciplinu uspostavio je engleski matematičar **Arthur Cayley** (1821. - 1895.) baveći se njenim primjenama u kemiji. Tipičan primjer grafova su crteži kemijskih molekula (molekulski grafovi). Tako npr. molekulu vode prikazujemo grafom H – O – H, odnosno grafom s tri vrha povezanih s dva brida, gdje dva vrha predstavljaju atome vodika, a jedan predstavlja atom kisika. Takvi prikazi ustalili su se upravo u Cayleyevo doba, a on je u nizu članaka tokom 1870-ih i 1880-ih godina riješio neka od kemijskih pitanja svodivih na pitanja teorije grafova. Tako

[2]Ploha u euklidskom prostoru je orijentabilna ako je nemoguće objekt koji nije zrcalno simetričan pomicanjem unutar te plohe vratiti na početnu poziciju tako da mu je izgled zrcaljen.



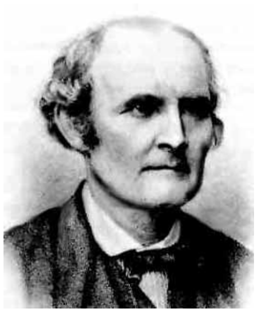
Slika 4.5: Möbiusova traka.

je npr. matematički dokazao da su molekule alkana (zasićenih ugljikovodika) $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$ moguće samo za $m = 2n + 2$. Primjer alkana je metan CH_4:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{H} & & \\ & & | & & \\ \mathrm{H} & - & \mathrm{C} & - & \mathrm{H}\,. \\ & & | & & \\ & & \mathrm{H} & & \end{array}$$

Iz kemije je poznato da su u alkanima sve veze jednostruke i da nema ciklusa (zatvorenih prstenova unutar molekule). Time grafovi molekula alkana spadaju u vrstu grafova koje danas zovemo **stabla** i kojima se bavio Cayley. S obzirom da u alkanu imamo n četverovalentnih ugljikovih atoma tj. vrhova stupnja 4, te m jednovalentnih vodikovih atoma tj. vrhova stupnja 1, ukupno imamo $\frac{4n+m}{2}$ bridova (dijelimo s 2 jer smo svaki brid prebrojali dvaput tj. brojali smo ga po jednom u svakom od njegova dva kraja). S druge strane, ukupan broj atoma tj. vrhova u grafu alkana $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_m$ je $m + n$. Za sva stabla vrijedi da je broj bridova za 1 manji od broja vrhova, dakle mora vrijediti $\frac{4n+m}{2} = m + n - 1$ tj. $m = 2n + 2$. Nadalje, Cayley se bavio enumeracijom alkana tj. izračunavanjem koliko ima mogućih alkana $\mathrm{C}_n\mathrm{H}_{2n+2}$ za dani n.

Arthur Cayley se već tokom školovanja istakao kao dobar matematičar. Studirao je i diplomirao matematiku (1842.) u Cambridgeu i nakon studija se tamo i zaposlio. No, nakon isteka stipendije morao je naći drugu profesiju te je odabrao pravo. Od 1849. do 1863. radio je kao odvjetnik. Iako je bio uspješan pravnik, uvijek je pravo smatrao samo sredstvom za zaradu novaca kako bi se mogao baviti matematikom. U tih 14 godina rada kao pravnik objavio je oko 250 matematičkih radova, a ukupno je tokom životu objavio 967 radova iz raznih područja matematike. Matematičke ideje je razmjenjivao



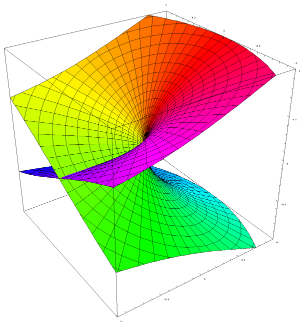
Slika 4.6: Arthur Cayley, 19. st.

sa sir William Rowan Hamiltonom i James Joseph Sylvesterom[3]. Osobito je mnogo komunicirao sa Sylvesterom jer je i on bio pravnik te su često skupa radili pri sudu i tokom radnog dana raspravljali o matematici.

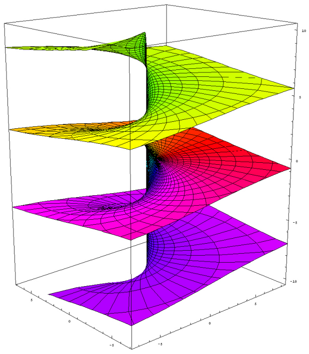
Godine 1863. Cayley dobiva mjesto profesora matematike u Cambridgeu, što je za njega doduše značilo bitno smanjenje prihoda (kao i danas, pravnici su i tada bili bolje plaćeni od znanstvenika), ali je Cayley prihvatio mjesto sretan da ima mogućnost potpuno se posvetiti matematici. Ubrzo iza toga se oženio i imao je vrlo sretan brak. Pokazao je velik interes za pokret za sveučilišno obrazovanje žena. Godine 1881. pozvan je održati niz predavanja na *Johns Hopkins University* u Baltimoreu (SAD), gdje je Sylvester u međuvremenu postao profesor matematike. Tamo je proveo prvih pet mjeseci godine 1882. Po povratku je (1883) postao predsjednik *British Association for the Advancement of Science*. Njegov govor tom prigodom bio je popularni prikaz matematike za znanstveni krug, a ujedno vrijedan povijesni pregled različitih matematičkih teorija.

U svom revolucionarnom habilitacijskom predavanju spomenutom u poglavlju o otkriću neeuklidskih geometrija, **Georg Friedrich Bernhard Riemann** je opisao geometriju kao znanost o mnogostrukostima proizvoljnih dimenzija, uz definirane koordinate i metriku. Godine 1851. uveo je Riemannove plohe. One su, pojednostavljeno rečeno, uvedene zbog implicitno definiranih funkcija $f(x, y) = 0$ koje ne definiraju nužno funkcije $y = \varphi(x)$ u uobičajenom smislu jedinstvene određenosti y za dani x. Tako kvadratni korijen zapravo ima dvije moguće vrijednosti i zadan je implicitno s $y^2 - x = 0$. Riemannova ideja je da za takve slučajeve koristimo onoliko kopija kompleksne ravnine $\mathbb{C}$ koliko nam treba različitih x-eva (dakle, za kvadratni korijen trebaju nam dvije kopije kompleksne ravnine). Na svakoj kopiji komplek-

[3]James Joseph Sylvester, 1814. - 1897., engleski matematičar, bavio se matricama. Otkrio je diskriminantu kubne jednadžbe te je prvi koji je koristio izraz diskriminanta u kontekstu jednadžbi stupnja većeg od dva.



(a)



(b)

Slika 4.7: Primjeri Riemannovih ploha.

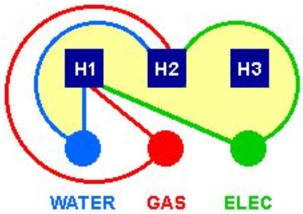
sne ravnine naša implicitno zadana funkcija definirati će po jednu pravu funkciju (u primjeru s korijenom imat ćemo jednom $y = \sqrt{x}$, a na drugoj kopiji $y = -\sqrt{x}$). Te kopije kompleksne ravnine se zatim organiziraju u novi topološki prostor (skup s definiranim otvorenim i zatvorenim podskupovima) koji zovemo Riemannovom plohom. Same Riemannove plohe možemo si predočiti kao vrstu ploha u prostoru koje imaju specijalnu dodatnu strukturu (tu prije svega mislimo da su lokalno kompleksne tj. da okolinu svake točke Riemannove plohe možemo interpretirati kao podskup kompleksne ravnine). Na slici 4.7 vide se dvije Riemannove plohe (lijeva je ona nastala iz implicitno zadane funkcije $y^2 = x$ koja se sastoji od dvije povezane kopije kompleksne ravnine).

Francuski matematičar **Marie Ennemond Camille Jordan** (1838. - 1922.) 1860-ih godina znajući za Riemannove rezultate uvodi mnoge nove topološke koncepte i invarijante. Uveo je pojam homotopije puteva (neprekidnih deformacija jednog puta na plohi u drugi) i grupe homotopija plohe (bez eksplicitnog korištenja terminologije grupa). Poznat je **Jordanov teorem** da jednostavno zatvorena krivulja[4] u ravnini dijeli ravninu na točno dva područja (jedno ograničeno, a drugi neograničeno) kojima je ta krivulja rub. Broj područja ravnine prema tome ne ovisi o obliku i kompliciranosti krivulje, nego samo o tome je li jednostavno zatvorena ili ne.

Primjer 5 *Poznat je sljedeći zadatak: tri točke u ravnini (zamišljene kuće) treba svaku spojiti linijom (zamišljenim vodom) s tri druge točke u ravnini (zamišljene kao izvori plina, vode i struje). U ravnini taj zadatak nije rješiv.*

[4]Jednostavno zatvorena krivulja je zatvorena krivulja koja nigdje ne siječe samu sebe. Npr. kružnica je jednostavno zatvorena, a krivulja kojom pišemo brojku osam nije.

Slika 4.8: Marie Ennemond Camille Jordan, 19./20. st.



Slika 4.9: Tri kuće u ravnini ne mogu se spojiti s tri izvora u toj ravnini bez da se vodovi sijeku (ako je uvjet da su svi vodovi u istoj ravnini).

Uzmimo naime da su prve tri točke označene A, B i C, a treba ih spojiti s točkama 1, 2 *i* 3*. Prvo spojimo A s* 1, 2 *i* 3*, a zatim to učinimo i s B pazeći pritom da ne siječemo ranije nacrtane linije – ma kako da smo nacrtali naše točke ovo je uvijek lako izvedivo. Time smo dobili jednostavno zatvorenu krivulju $A1B3A$. Pritom je C ostala unutar te krivulje, a* 2 *izvan (ili obrnuto) te po Jordanovom teoremu slijedi da ih ne možemo spojiti bez da presiječemo krivulju $A1B3A$ (vidi sliku 4.9).*

Listing, Riemann i Jordan općenito su se bavili problemima povezanosti na plohi. Te je ideje konačno potpuno precizirao te mnoge poopćio **Jules Henri Poincaré** (1854. - 1912.). Godine 1895. u djelu *Analysis situs* (tada uobičajen termin za topologiju) daje prvi sistematski prikaz topologije. Poincaré je osnivač algebarske topologije koja koristi algebarske metode, osobito teoriju grupa, za rješavanje topoloških problema. Uveo je fundamentalnu grupu kako bi razlikovao vrste dvodimenzionalnih ploha i pokazao da su sve dvodimenzionalne plohe koje imaju istu fundamentalnu grupu kao dvodimenzionalna sfera njoj topološki ekvivalentne. Smisao te tvrdnje pojednostavljeno se može izreći ovako: ako dvodimenzionalna ploha ima svojstvo da kako god na nju polegli omču lasa sužavanjem te omče ona će se stegnuti do točke i spasti s plohe, onda je ta ploha topološki ekvivalentna sferi. Postavio je analognu hipotezu za trodimenzionalne sfere, a kasnije je ta hipoteza poopćena na n-dimenzionalne sfere. Ta je hipoteza dokazana za dimenzije veće od 4 godine 1961., a zatim godine 1982. za dimenziju 4. Nakon dokaza velikog Fermatovog teorema (1995.) Poincaréova hipoteza za slučaj $n = 3$ postala je najpoznatiji neriješeni matematički problem. Konačno je dokazana 2003. (G. Perelman), a dokaz je priznat 2006. Poincaré se često opisuje kao posljenji univerzalni matematičar jer se bavio nizom disciplina, kako teorijskih tako i primijenjenih, a djela mu zahvaćaju i politiku, obrazovanje i etiku. Objavio je i niz popularnoznanstvenih radova. Poincaréove rezultate je u potpunu topološku teoriju izgradio nizozemski matematičar 1912. **Jan Brouwer** (1881. - 1966.).

Uz opisani smjer razvoja topologije vezan za proučavanje povezanosti na plohama, postojao je i drugi. Tu se radilo o postepenom poopćavanju ideja konvergencije. Proces počinje kad je 1817. češki teolog, filozof i matematičar **Bernhard Bolzano** (1781. - 1848.) poopčio ideju konvergencije nizova brojeva na konvergenciju proizvoljnih ograničenih beskonačnih podskupova realnih brojeva. **Georg Cantor** je 1872. uveo pojmove deriviranog skupa (S' je skup svih gomilišta skupa S) i otvorenih i zatvorenih skupova u $\mathbb{R}$ (S je zatvoren ako $S' \subseteq S$, S je otvoren ako je $\mathbb{R} \setminus S$ zatvoren). Podsjetimo se da je gomilište skupa S točka c takva da svaka njena okolina bez nje same ima neprazan presjek sa S (alternativno: postoji niz elemenata u S koji konvergira prema c). **Karl Weierstrass** je godine 1877. precizno dokazao **Bolzano-Weierstrassov teorem**: Ograničen beskonačan podskup skupa $\mathbb{R}$ ima bar jedno gomilište. Godine 1906. **Maurice René Fréchet** (1878. - 1973.) definira kompaktan prostor kao prostor u kojem svaki beskonačan ograničen skup ima gomilište. Definirao je metričke prostore i konvergenciju u njima te tako poopćio standardne euklidske varijante istih pojmova. Proširio je i Cantorove ideje otvorenih i zatvorenih skupova na opće metričke prostore. Potpuno ukidanje metrike i aksiomatski pristup topologiji zasluga je Riesza[5] (1909.). Hausdorff[6] 1914. upotpunjuje te ideje i time dobivamo definiciju apstraktnih topoloških prostora.

Treća struja razvoja topoloških koncepata pojavila se početkom 20. stoljeća u obliku funkcionalne analize, koja je proizašla iz fizikalnih i astronomskih problema jer metode klasične analize nisu bile dovoljne. Počeci funkcionalne analize sežu u kraj 17. i početak 18. stoljeća kad su braća Bernoulli uvela varijacijski račun u kojem se vrijednost integrala shvaća kao funkcija

[5]Frygies Riesz (1880. - 1956.), mađarski matematičar, jedan od utemeljitelja funkcionalne analize.

[6]Felix Hausdorff (1868. - 1942.), tvorac teorije topoloških i metričkih prostora. U teoriju skupova uveo je koncept parcijalno uređenog skupa.

od podintegralne funkcije. Pojam funkcional koristi Hadamard[7] 1903. za F zadan s $F(f) = \lim_n \int_a^b f(x)g_n(x)dx$. Analiziranje linearnih funkcionala nastavio je Fréchet. Schmidt[8] je 1907. promatrao konvergenciju u prostorima nizova. Schmidt je definirao udaljenost putem skalarnog produkta. Banach[9] je cijelu teoriju učinio joša apstraktnijom time što je 1932. poopćio unitarne prostore na općenitije normirane prostore.

[7]Jacques Hadamerd (1865. - 1963.), francuski matematičar, najpoznatiji je po dokazu teorema da broj prostih brojeva manjih od n teži u beskonačnost istom brzinom kao i $\frac{n}{\ln n}$.

[8]Erhard Schmidt (1876. - 1959.), najpoznatiji je po Gram-Schmidtovom postupku ortogonalziacije kojim se proizvoljna baza prostora može prevesti u ortogonalnu.

[9]Stefan Banach (1892. - 1945.), utemeljitelj suvremene funkcionalne analize, bitno je doprinijeo teoriji topoloških vektorskih prostora i teoriji mjere i integracije.

Poglavlje 5

Razvoj algebre nakon renesanse

Glavna algebarska dostignuća do doba renesanse vezana su za rješavanje jednadžbi do četvrtog stupnja. Daljni razvoj algebre olakšalo je moderniziranje matematičke notacije, za što je osobito zaslužan **René Descartes**. Već smo spomenuli da je u trećem dijelu svoje *La Géométrie* (1637.) uveo danas uobičajene oznake: slova s početka abecede za poznate veličine, a s kraja za nepoznanice. I druge oznake ($+$, $-$ i još neke) su poput današnjih, a najbitnija razlika je korištenje ae za jednakost. U tom trećem dijelu Descartes detaljno obrađuje i algebarske jednadžbe.

Ipak, bitniji napredak algebre ostvarit će se tek nakon što infinitezimalni račun postane manje „in”, tako da se prvi značajniji algebarski rezultati novog vijeka bilježe u drugoj polovici 18. stoljeća. Uz razrješenje pitanja rješivosti algebarskih jednadžbi stupnja većeg od 4, novovjeka algebra postat će apstraktna matematička disciplina koja se bavi algebarskim strukturama.

5.1 Nastanak teorije grupa

Jedan od temeljnih pojmova suvremene matematike su grupe. Grupa se sastoji od nepraznog skupa G i binarne operacije $*$ definirane na njemu (binarna operacija na G je funkcija koja po dvama elementima iz G pridružuje neki objekt) s tim da moraju biti ispunjena četiri uvjeta: zatvorenost, asocijativnost, postojanje neutralnog elementa i invertibilnost svih elemenata. Zatvorenost znači da binarna operacija dvama elementima od G pridružuje element iz istog skupa G, tj. nikojim dvama elementima iz G ne pridružuje objekt koji nije iz G. Asocijativnost znači da kod uzastopnog ponavljanja iste operacije nisu potrebne zagrade:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

za sve $a, b, c \in G$. Postojanje neutralnog elementa znači da u G postoji neki element e sa svojstvom da binarna operacija primijenjena na njega i bilo koji drugi element $a \in G$ ne mijenja taj element:

$$a * e = e * a = a.$$

Invertibilnost svih elemenata znači da za svaki element $a \in G$ možemo naći element $a^{-1} \in G$ tako da binarna operacija njima dvama pridružuje neutralni element:

$$a^{-1} * a = a * a{-}1 = e.$$

Kao najjednostavniji primjer grupe danas se obično navodi skup cijelih brojeva uz zbrajanje kao binarnu operaciju. Drugačiji primjer grupe je npr. skup $\mathbb{Z}_{12} = \{1, 2, \ldots, 12\}$ (možemo ga zamišljati kao sate na običnom satu s kazaljkama) uz „zbrajanje modulo 12" (zbrajanje sati) u kojem je $1 + 2 = 3$, ali $5 + 10 = 3$ tj. 10 sati iza 5 je 3 sata. Neutralni element je 12 (kad se kazaljka pomakne za 12 sati na satu dođe u istu poziciju u kojoj je i bila). Svaki element ima inverzni – to je broj koji treba dodati da dobijemo 12, npr. inverz od 10 je 2 jer je $10+2 = 12$. Za modernu algebru važne grupe su i grupe permutacija: njihovi elementi su (ne nužno sve) permutacije[1] nekog skupa, a kao operacija uzima se kompozicija permutacija. Pritom naravno u svakoj grupi permutacija nekog skupa S naravno moraju vrijediti svojstva grupe. Prvo, kompozicija bilo koje dvije permutacije iz grupe mora također biti u grupi. Nadalje, mora vrijediti asocijativnost, no ona sigurno vrijedi jer je komponiranje funkcija asocijativno (kod uzastopne kompozicije tri funkcije ne trebamo zagradama određivati redoslijed tj. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$). Uz to, grupe permutacija moraju sadržavati identitetu (funkciju i koja „ništa ne radi" i tako predstavlja neutralni element za kompoziciju: $i \circ f = f \circ i = f$) i za svaku permutaciju u grupi mora biti i njena inverzna (permutacija koja elemente vraća u polazni redoslijed: $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$). Iako je ovaj primjer grupe konceptualno najkompliciraniji od spomenuta tri, zanimljivo je da se upravo on prvi pojavio – prve poznate grupe bile su grupe permutacija.

Poticaj razvoju teorije grupa dala su tri područja: geometrija, teorija brojeva i teorija algebarskih jednadžbi.

Geometrija je na početku 19. stoljeća postala apstraktna. Pojava projektivne i neeuklidskih geometrija oduzela joj je „metrički" karakter, povećane su i dimenzije prostorâ čije geometrije se razmatraju, a sredinom 19. stoljeća geometrije se pokušavaju i klasificirati obzirom na tipična preslikavanja. S druge strane, teorija brojeva u 18. i 19. stoljeću se među ostalim puno bavi problemima djeljivosti (*de facto* se matematičari bave grupama ostataka

[1] Permutacija skupa S je bijekcija sa S na S. Možemo ju shvatiti kao funkciju koja prerasporedi elemente od S.

Slika 5.1: Paolo Ruffini, 18./19. st.

modulo n). O tome će nešto više riječi biti u poglavlju u teoriji brojeva, a ovdje ćemo se koncentrirati na treći „izvor" teorije grupa: problem rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima. Podsjetimo se: jednadžba je algebarska ako je oblika polinom jednako nula, pri čemu su svi koeficijenti polinoma cijeli brojevi. Algebarska jednadžba nekog stupnja n rješiva je u radikalima ako je moguće navesti formulu za određivanje njenih rješenja preko koeficijenata te jednadžbe i konačno mnogo primjena četiri osnovne računske operacije te n-tih korijena na te koeficijente. U renesansi je dokazano da su sve algebarske jednadžbe do četvrtog stupnja rješive u radikalima.

Prvi napredak u smjeru rješenja pitanja rješivosti jednadžbi petog stupnja u radikalima ostvario je **Joseph-Louis Lagrange**. Kao i njegovi suvremenici, Lagrange se nadao naći rješenje jednadžbi petog stupnja u radikalima. U to se doba smatralo da još nije nađeno takvo rješenje, a nije se pomišljalo na eventualnu nemogućnost takvog rješenja. Lagrangeov glavni doprinos razvoju algebre desio se u njegovom berlinskom razdoblju. U članku iz 1770. bavio se pitanjem zašto je za jednadžbe stupnja najviše četiri moguće naći rješenje u radikalima, nadajući se tako otkriti kako riješiti jednadžbe većeg stupnja. Taj je članak ponajviše bitan jer je prvi koji rješenja jednadžbi razmatra kao apstraktne vrijednosti, a ne kao konkretne brojeve. Lagrange se u tom članku bavio i permutacijama korijena algebarskih jednadžbi te tako započinje niz matematičara koji će razviti teoriju permutacija u algebarskom smislu. Tako je Lagrange primijetio da ako su x_1, x_2, x_3 korijeni neke kubne jednadžbe te $1, \omega, \omega^2$ kompleksni kubni korijeni broja 1, onda za šest mogućih permutacija od x_1, x_2, x_3 izraz $x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$ poprima samo dvije različite vrijednosti.

Prvi koji je tvrdio da se opća jednadžba petog stupnja ne može riješiti u radikalima bio je talijanski matematičar i medicinar **Paolo Ruffini** (1765. - 1822,). On je 1799. objavio knjigu o teoriji algebarskih jednadžbi u kojoj tvrdi da se jednadžbe petog stupnja ne mogu riješiti u radikalima. To je pokušavao dokazati koristeći teoriju permutacija, pri čemu je morao dokazati niz teorema koji su zapravo teoremi o grupama permutacija. Ruffini je u svojoj teoriji permutacija uveo mnoge moderne pojmove teorije grupa, primjerice red elementa tj. permutacije (to je broj koliko puta permutaciju treba komponirati sa samom sobom da bi se dobilo identitetu).

Primjer 6 *Transpozicija je permutacija koja zamijeni dva elementa na određenim pozicijama, a ostale elemente „ostavlja na mjestu". Transpozicija je uvijek reda dva: ako zamijenimo elemente na nekim dvama pozicijama i ponovimo to, elementi će se vratiti na polazna mjesta. Primijetimo: bitne su pozicije na koje permutacija (ovdje: transpozicija) djeluje, a ne objekti koje preraspoređuje.*

Ono što mi danas zovemo grupama permutacija Ruffini zove *permutazione*. Pritom eksplicitno koristi svojstvo zatvorenosti grupe. Svoje *permutazione* Ruffini dijeli na dvije podvrste: *permutazione semplice* (u modernoj terminologiji: cikličke grupe) i *permutazione composta*. Grupa permutacija je ciklička ako se može naći permutacija f u njoj tako da su sve ostale permutacije nastale kompozicijom permutacije f sa samom sobom određeni broj puta.

Ruffinijev prvi dokaz nerješivosti jednadžbi stupnja 5 u radikalima ipak ima rupu. Zanimljivo je da taj dokaz nije izazvao gotovo nikakvo zanimanje. Razočaran nedostatnom reakcijom, Ruffini je 1801. kopiju svoje knjige poslao Lagrangeu. Ne dobivši odgovor, šalje još jednu kopiju moleći Lagrangea da ga upozori ako se ne radi o novim rezultatima. I opet Lagrange nije odgovorio, te je Ruffini poslao knjigu i treći put 1802. Čini se da ni taj put nije bilo odgovora. Nakon toga je Ruffini 1803. objavio drugi dokaz za koji je smatrao da će biti razumljiviji. Ponovno su reakcije matematičke javnosti bile gotovo nepostojeće, no Ruffini se nije predavao. Objavio je još dva dokaza 1808. i 1813. Naglasimo ovdje da je najveći Ruffinijev problem bio upravo u tome da nije bilo reakcija, dakle ni prigovora dokazu. Čini se da matematička javnost jednostavno nije htjela znati za činjenicu da jednadžbe petog stupnja nisu rješive u radikalima. Ruffini je zamolio pariški znanstveni institut da provjeri točnost dokaza, te je za to imenovana komisija koju su činili Lagrange, Legendre and Lacroix. Izvještaj komisije bio je da se ne radi o ničem bitnom. Za mišljenje je zamoljen i engleski *Royal Society*, čija komisija je dala nešto ljepši izvještaj u kojem se doduše ne slažu sa svim detaljima, ali teorem smatraju dokazanim. Najčudnije u cijeloj priči pak je da je jedini matematičar koji je priznao i važnost i točnost rezultata bio Cauchy 1821. – matematičar koji ne samo da nije bio sklon priznati tuđe zasluge, nego ih je često i prisvajao. Sâm **Cauchy** je u razdoblju 1813. i 1815. napisao djelo o grupama permutacija u kojem je proširio neke Ruffinijeve

Slika 5.2: Niels Henrik Abel, 19. st.

rezultate. Najznačajnije svoje djelo o grupama permutacija objavio je 1845. i tim djelom teorija permutacija postaje samostalna teorija. Uveo je označavanje potencija permutacija (eksponent nula označava identitetu), definirao red permutacije, uveo cikličku notaciju... Umjesto naziva grupa koristio je naziv *systeme des substitutions conjugués* (sustav konjugiranih supstitucija), koji je dulje vremena korišten.

Prvi priznati dokaz o nerješivosti jednadžbi petog stupnja u radikalima dao je norveški matematičar **Niels Henrik Abel** (1802. - 1829.). Koristio je postojeće ideje o permutacijama rješenjâ jednadžbi, no njegov dokaz nije bitno doprinijeo razvoju teorije grupa.

Abel sa suvremenikom Galoisom dijeli dvije zajedničke crte: ranu smrt i dokaz nerješivosti jednadžbi petog stupnja u radikalima. Iako najpoznatiji po tom rezultatu, iznimno je važan i po rezultatima u području matematičke analize, osobito eliptičkih funkcija[2]. Abelov život je bio obilježen siromaštvom. Otac mu je bio teolog i filolog, norveški nacionalist i aktivan u borbi za norvešku nezavisnost od Danske. Majka mu je bila kćer trgovca i vlasnika brodova. Obitelj je imala sedmero djece, od kojih je Niels bio drugo. Kad je Niels imao godinu dana, otac nakon smrti svog oca nasljeđuje mjesto protestantskog svećenika u Gjerstadu. Do trinaeste godine Nielsa podučava otac, no žive u siromaštvu doba ekonomske krize. Problemi obitelji ipak nisu bili samo ekonomski i politički. Prema raznim izvorima, Nielsov otac je bio alkoholičar, a majka optužena za slab moral.

Godine 1815. Niels i njegov stariji brat poslani su u katedralnu školu u Christianii (danas Oslo). Neinspiriran osrednjom školom, Niels je bio prosječan učenik koji je pokazao nešto talenta za matematiku i fiziku. Kad je učitelj matematike otpušten jer je nasmrt pretukao dječaka, stvari su se promijenile nabolje dolaskom novog učitelja matematike Holmboea. Potican od Holmboea, u roku od godinu dana Abel je bio sposoban čitati djela

[2]Eliptičke funkcije su funkcije definirane na kompleksnoj ravnini koje su periodične u dva linearno nezavisna smjera.

univerzitetske razine. Sa 16 godina Abel je dokazao binomni teorem za sve realne eksponente i tako proširio Eulerov rezultat koji je vrijedio samo za racionalne eksponente.

Nakon smrti oca (1820.) Abelova obitelj se našla u još težim financijskim uvjetima, no Holmboe je uspio izboriti stipendiju koja je omogućila da Abel završi školu. U to doba Abel je počeo raditi na pitanju rješivosti opće jednadžbe petog stupnja u radikalima. Prve rezultate o jednadžbi petog stupnja, iz 1821., u kojima je naizgled dokazao rješivost, Abel je predao na objavljivanje Kraljevskom društvu u Copenhagenu, no kad su ga zamolili za konkretan primjer, otkrio je grešku. Diplomirao je 1822. na sveučilištu u Christianii. Na tom je sveučilištu imao jaku podršku profesora astronomije Christophera Hansteena, čija se žena počela brinuti za Abela kao da joj je vlastito dijete. U novom časopisu kojeg je pokrenuo Hansteen, Abel 1823. je objavio prva rješenja nekih integralnih jednadžbi u povijesti.

Pri jednom boravku u Copenhagenu radi matematičkih kontakata, upoznao je Christine Kemp i s njom se ubrzo zaručio. Po povratku u Christianiu, pokušavao je izboriti financiranje puta u Europu kako bi upoznao velike matematičare Njemačke i Francuske. Nije znao ni njemački ni francuski pa je financiranje odgođeno za dvije godine, dok ne nauči te jezike. Abel se vratio radu na jednadžbama petog stupnja i 1824. dokazao da se ne mogu riješiti u radikalima. Taj je rad objavio na vlastiti račun i na francuskom jeziku, kako bi imao impresivni rezultat za prezentiranje na svom putovanju. Godine 1825. Abel dobiva novce za studijski posjet Francuskoj i Njemačkoj. Posjetio je Berlin, gdje se sprijateljio s Augustom Crelleom, matematičarem amaterom koji je osnovao jedan od najznamenitijih matematičkih časopisa u povijesti: *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, poznat kao *Crelle's Journal*. U tom je časopisu Abel objavio nekoliko radova, među inim i jasniju verziju svog dokaza o nerjašivosti jednadžbe petog stupnja (1827.). Za vrijeme boravka u Berlinu, saznao je da je mjesto profesora matematike na sveučilištu u Christianii (jedinom u Norveškoj) dobio Holmboe, koji bi mjesto bio odbio radi Abela, da mu nisu zaprijetili da ako on odbije, mjesto dobiva stranac. S druge strane, u Berlinu nije bilo mogućnosti za stalno mjesto u iduće četiri godine te se Abel našao u ozbiljnim egzistencijalnim problemima. Ostao je u Berlinu i dalje se bavio tad još nedovoljno rigorozno postavljenim osnovama matematičke analize. Nakon što je čuo da Gauss nije bio zadovoljan dobivanjem njegova rada o jednadžbama petog stupnja, Abel odustaje od ideje puta u Göttingen. Nije poznato zašto je Gauss imao takav stav prema Abelovom radu, jer je sigurno da ga nije pročitao - pismo je nađeno neotvoreno nakon Gaussove smrti. Mogući su razlozi da je sâm to dokazao ili pak da je takav dokaz smatrao nebitnim, što je vjerojatnije.

Nakon Berlina, Abel je posjetio Pariz, gdje je nezainteresirano primljen.

Prema njegovim riječima „*Francuzi su mnogo rezerviraniji prema strancima nego Nijemci*". U Parizu je napisao važno djelo o eliptičkim integralima. Kao recenzenti imenovani su Cauchy i Legendre. Legendre je tvrdio da je prestar i da ne vidi čitati rukopis, te je posao prepustio Cauchyju. Abel je ostao u Parizu, zlovoljan, zabrinut - i gladan: mogao si je priuštiti samo jedan obrok dnevno. Zdravlje mu slabi i u lošem stanju vraća se u Berlin 1826. Tu posuđuje novce i nastavlja raditi na eliptičkim funkcijama i pretvara teoriju eliptičkih integrala u teoriju eliptičkih funkcija. Abelovi rezultati o eliptičkim funkcijama postat će temelj svih budućih istraživanja u tom području. Eliptički integrali su funkcije definirane preko integrala oblika

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t))\mathrm{d}t$$

gdje je c konstanta, R racionalna funkcija u oba svoja argumenta, a P je kvadratni korijen polinoma trećeg ili četvrtog stupnja bez višestrukih nultočki. Eliptički integrali generaliziraju arkus-funkcije (inverzne funkcije trigonometrijskih funkcija). Npr. pozicija njihala je dana kao sinusna funkcija vremena ako se radi o malim oscilacijama i vrijedi $\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$, a potpuno rješenje za proizvoljno velike oscilacije zahtijeva korištenje eliptičkih integrala. Kako eliptički integrali generaliziraju arkus-funkcije, tako njihovi inverzi, eliptičke funkcije, generaliziraju trigonometrijske funkcije. Do Abela, matematičari su stotinjak godina, dosta neuspješno, pokušavali proučiti eliptičke integrale. Abel ih invertira u eliptičke funkcije, kojima se mnogo lakše manipulira (slično kao što je lakše baratati sinusom, nego arkus-sinusom) i time otvara prostor novim istraživanjima.

Crelle je Abela nagovarao da ostane u Berlinu dok mu ne nađe posao, no Abel se odlučio vratiti kući. U svibnju 1827. stiže u Christianiu i dobiva mali kredit od sveučilišta koji mu se odbija od svih budućih plaća. Da bi zaradio malo novca, Abel podučava djecu, a zaručnica se zapošljava kao guvernanta u Frolandu. Situacija se malo popravlja kad Abel dobiva Hansteenovo mjesto na sveučilištu i vojnoj akademiji, kad je Hansteen dobio velike novce da istraži Zemljino magnetsko polje u Sibiru. Godine 1828. Abel saznaje za Jacobijeve rezultate o transformacijama eliptičkih integrala i pokazuje da se ti rezultati mogu dobiti kao posljedica njegovih. Ubrzo objavljuje i nekoliko novih rezultata na tu temu, te on i Jacobi postaju znameniti: Legendre ih naziva najvećim analitičarima tog doba. U to doba se Abel počinje baviti i pitanjem koje će nekoliko godina kasnije riješiti Galois: koje algebarske jednadžbe su rješive u radikalima?

Zdravlje mu je ipak bilo previše narušeno siromašnim životom. Saznaje da je njegovo pariško djelo o eliptičkim funkcijama zagubljeno (zanimljivo je da je Cauchy zagubio i Galoisove radove) i ponovno piše glavne rezultate: rad

Slika 5.3: Évariste Galois, 19. st.

od dvije strane nazvan *Jedan teorem*. Za Božić putuje zaručnici u Froland te se ozbiljno razbolijeva nakon jedne vožnje sanjkama. Za to saznaje Crelle, koji opet pojačava trud da mu nađe mjesto. Crelle uspijeva, nalazi mjesto profesora u Berlinu, no pismo s dobrom vijesti stiže dva dana nakon Abelove smrti od tuberkuloze koju je „zaradio" tokom svog boravka u Parizu.

Nakon njegove smrti, Cauchy traži zagubljeni članak i nalazi ga 1830. Štampan je 1841., no ponovno nestaje - i ponovno je pronađen tek 1952. u Firenzi! Godine 1830. pariška Akademija znanosti dodjeljuje *Grand Prix* (Veliku nagradu) Abelu i Jacobiju za izvanredna dostignuća. Na natječaj za tu je nagradu svoj rad poslao i Galois, no taj je rad izgubljen i nije ušao u izbor. Nakon Abelove smrti nađeni su i još neki rezultati o algebarskim jednadžbama, među inim i teorem u pismu Crelleu iz jeseni 1828. koji je u biti jednak Galoisovom rezultatu iz 1830: ako ireducibilna jednadžba trećeg stupnja ima takvu vezu među tri svoja korijena da se jedan od njih može izraziti kao racionalna funkcija druga dva, onda je jednadžba rješiva u radikalima.

Drugi matematičar koji se u isto doba bavio problemom rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima i koji je također rano završio svoj život bio je Francuz **Évariste Galois** (1811. - 1832.). Rođen je u doba vrhunca Napoleonove vladavine, a roditelji su mu bili republikanski nastrojeni. Do dvanaeste godine podučavala ga je majka, a zatim je pohađao internat. U doba Galoisova školovanja Francuska je ponovno bila kraljevina. Prve dvije godine Galois je bio dobar đak, a onda je 1826. pao razred jer mu rad u retorici nije bio zadovoljavajući. Ipak, 1827. mu je dozvoljeno da upiše tečaj matematike, koja ga je ubrzo tako očarala da ostaloj nastavi više nije posvećivao pažnju. Učitelji su ga smatrali čudnim, bizarnim, originalnim i zatvorenim. Zanimljivo je da su ga kritizirali zbog originalnosti, a Galois je postao jedan od najoriginalnijih matematičara u povijesti. Godine 1828. Galois se pokušao upisati na tada za matematiku najugledniju francusku visoku školu, *École Polytéechnique*, ali zbog nedovoljne pripremljenosti se nije uspio upisati. Vratiši se u svoj internat sve se više bavi pitanjem rješivosti algebarskih jednadžbi u radikalima. Početkom 1829. objavio je svoj prvi znanstveni rad, a zatim je na recenziju predao još dva na temu rješivosti algebarskih jednadžbi. Kao recenzent imenovan je Cauchy, koji je te radove uspio zagubiti - i nikad više nisu pronađeni.

Doba nakon ponovne uspostave kraljevine u Francuskoj obilježeno je jakim političkim kretanjima i sukobima republikanaca i rojalista, što se odrazilo i na Galoisov život. Druga polovina 1829. za Galoisa počinje tragedijom: 2. srpnja mu se ubio otac, a razlog je bio kleveta upućena na račun obitelji od strane političkih protivnika. U potresenom stanju Galois je nekoliko tjedana kasnije opet pokušao položiti prijemni ispit za *École Polytéchnique* i ponovno nije uspio. Za taj je pokušaj vezana jedna od najpoznatijih matematičkih anegdota: navodno je Galois iznerviran nedovoljno preciznim pitanjima ispitivača, kad je shvatio da usprkos svoje genijalnosti neće položiti ispit, bacio spužvu u lice dotičnog ispitivača. Nakon tog ponovnog neuspjeha, Galois je odabrao nešto lošiju školu *École Normale*. Tokom 1830. predao je još jedan članak, ovaj put za nagradu Akademije znanosti. Taj je članak predan na recenziju Fourieru, koji je ubrzo zatim umro. I ovom članku nakon toga je izgubljen svaki trag. Početkom 1830. objavio je tri članka iz teorije eliptičkih krivulja, a u ljetu saznaje da njegov rad nije bio niti razmatran za nagradu te da je nagrada dodijeljena, kako je već spomenuto, Jacobiju i Abelu. U to je doba Galois već siguran da je pravi problem sustav koji onemogućava genijalne pojedince.

U srpnju 1830. u Francuskoj dolazi do revolucije, kralj mora bježati iz zemlje, a u Parizu dolazi do uličnih pobuna. Direktor *École Normale* zabranio je studentima izlazak na ulice i zaključao ih u školi. Na to je Galois reagirao pismom u studentskom listu. Iako ga je potpisao, urednik je da ga zaštiti pismo objavio anonimno. Direktor škole je usprkos tome saznao tko je autor i optuživši ga za anonimni napad izbacio Galoisa sa škole. Galois se tada pridružuje Nacionalnoj gardi, republikanskoj grani milicije. Kad je pobuna smirena, novi kralj Lous-Philippe 31. prosinca 1830. ukinuo je Nacionalnu gardu. Početkom 1831. Galois je za život zarađivao privatnom podukom. Potaknut od Poissona, predao je treću verziju svog rada o algebarskim jednadžbama Akademiji 17. siječnja 1831.

Krajem 1830. godine nekoliko pripadnika Nacionalne garde bilo je zatvoreno pod optužbom da su htjeli svrgnuti vlast, a pušteni su na slobodu 9. svibnja 1831. Proslavi oslobađanja prisustvovao je i Galois te je te večeri podigao čašu i držeći bodež u ruci izrekao zdravicu kralju koja je protumačena kao prijetnja. Na suđenju 15. lipnja se Galois branio izjavom da je tekst bio „Louis-Philippeu, ako izda", ali da su riječi nestale u galami. Galois je pušten na slobodu i oslobođen optužbe. No, boravak na slobodi nije dugo trajao: na dan Bastille 14. srpnja uhapšen je zbog nošenja zabranjene uniforme Nacionalne garde, puške, nekoliko pištolja i bodeža. Ovaj put je osuđen i zatvoren u zatvor Saint-Pelagie. Tokom boravka u zatvoru saznao je da je njegov posljednji članak odbijen, s argumentom da je stil izlaganja nejasan i nedovoljno razrađen. Ipak, Poissonovo izvješće poticalo je Galoisa da izda potpuniji prikaz svoji rezultata. Tokom boravka u zatvoru Galois radi matematiku, ali i pokušava samoubojstvo koje su spriječili drugi zatvorenici. Kad je u ožujku 1832. izbila epidemija kolere u Parizu, zatvorenici i među njima Galois prebačeni su u pansion Sieur Faultrier, koji je bio zatvor otvorenog tipa. Tu se zaljubio u Stephanie, kćer liječnika. Ta njegova jedina ljubavna priča kratko je trajala: kad je pušten iz zatvora 29. travnja Stephanie se distancirala. Ubrzo zatim izazvan je na dvoboj. Povod dvoboja je bio vezan za Stephanie, ali nije jasno je li se radilo samo o ljubavnim razlozima (izazvali su ga njezin stric i navodni zaručnik) ili se, kako većina povjesničara smatra, zapravo radilo o političkim motivima. Postoje i mišljenja da se namjerno dao navesti u dvoboj tj. da se u biti radilo o insceniranom samoubojstvu. Bilo kako bilo, Galois je noć prije dvoboja, siguran da ga neće preživiti, proveo pišući. Radilo se o dva pisma. Prvo je upućeno kolegama republikancima i u njemu govori kako je u sukob upleten protiv svoje volje. Drugo pismo upućeno je prijatelju. Ono je poznato kao njegov „matematički testament” u kojemu se mogu naći temelji teorije grupa. Galois tu kaže: *... ako u takvoj grupi imamo supstitucije S i T, onda je u njoj i supstitucija ST.* Ipak, nigdje nije eksplicitno definirao grupe. Ostavljajući zbog nedostatka vremena mnoga mjesta nedokazana, Galois je tu noć zapisao pregled svih svojih rezultata. U dvoboju u jutro 30. svibnja ranjen je u trbuh, a protivnik i sekundant ga napuštaju. Teško ranjenog nalazi ga jedan seljak te Galois umire u bolnici 31. svibnja. Pogreb je trebao biti održan 2. lipnja, ali je večer prije policija razbila sastanak koji su smatrali uvodom u demonstracije koje su trebale biti održane na pogrebu. Tridesetero prisutnih je uhapšeno, a pogreb je održan dan kasnije na javnom groblju. Danas ne postoji trag mjestu gdje je Galois pokopan. Njegove su papire skupili brat i prijatelj Chevalier i poslali ih, kako je bila Galoisova želja, Gaussu i drugim matematičarima. Ti su spisi došli do Liouvillea[3] 1843., koji je shvatio njihovu genijalnost i izdao ih 1846.

Galois je vjerojatno bio prvi matematičar koji je stvarno shvatio da je pitanje rješivosti algebarske jednadžbe u radikalima neposredno vezano za strukturu grupe koja se danas zove Galoisovom grupom jednadžbe. Posebno bitno u Galoisovom pristupu bilo je da se nije, kao njegovi prethodnici i Abel, koncentrirao na pitanje jesu li jednadžbe petog stupnja rješive u radikalima,

[3]Joseph Liouville, 1809. - 1882., francuski matematičar, najpoznatiji je po dokazu egzistencije transcendentnih brojeva.

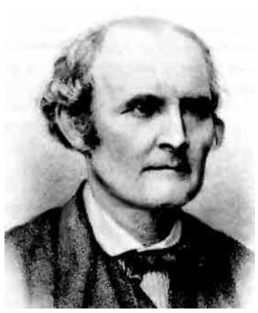
već se bavio općenitijim pitanjem: kako za zadanu algebarsku jednadžbu, bilo kojeg stupnja, utvrditi ima li rješenja u radikalima. Naime, očigledno je da za svaki stupanj n postoje jednadžbe koje jesu rješive u radikalima, primjerice jednadžbe $x^n = 1$. Galoisova grupa jednadžbe je posebna grupa permutacija njezinih rješenja. Za zadanu jednadžbu ponekad su njezina rješenja povezana dodatnim algebarskim jednadžbama. Galois je preuzeo Lagrangeovu ideju promatranja takvih dodatnih jednadžbi koje su ispunjene neovisno o tome kako odaberemo permutaciju rješenja polazne jednadžbe. Galoisova grupa jednadžbe odnosno polinoma koji određuje jednadžbu sastoji se od onih permutacija rješenjâ koje ne mijenjaju *niti jedan* algebarski izraz s tim rješenjima tj. koje su takve da sve algebarske jednadžbe koje vrijede za rješenja vrijede za bilo koji odabrani poredak tih rješenja.

Primjer 7 *Kvadratna jednadžba* $x^2-4x+1=0$ *ima dva rješenja* ($x_{1,2} = 2\pm\sqrt{3}$)*. Primjeri algebarskih identiteta koji su zadovoljeni neovisno o tome koje od dva rješenja zovemo* x_1*, a koje* x_2 *su Viéteove formule* $x_1+x_2 = 4$ *i* $x_1x_2 = 1$*. Može se pokazati da to vrijedi i za sve druge algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice. Galoisova grupa polinoma* x^2-4x+1 *se stoga sastoji od dvije permutacije: identitete i transpozicije (zamjene). To je (do na izomorfizam[4]) tzv. ciklička grupa* C_2*. Slično vrijedi i za sve druge kvadratne jednadžbe – za one čija oba rješenja su racionalni brojevi (npr.* $x^2-3x+2=0$*) Galoisova grupa je trivijalna (sastoji se samo od identitete), a za sve ostale ima dva elementa i izomorfna je grupi* C_2*.*

Primjer 8 *Jednadžba* $x^4-10x^2+1=0$ *ima četiri rješenja* $x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}$*. Postoje* $4! = 24$ *moguće permutacije tih rješenja, no nisu sve one u Galoisovoj grupi polinoma* x^4-10x^2+1*. Primjerice transpozicija koja četvorki* (x_1, x_2, x_3, x_4) *pridružuje četvorku* (x_1, x_3, x_2, x_4) *nije u Galoisovoj grupi jer jednadžba* $x_1 + x_2 = 0$ *jest zadovoljena ako odaberemo* $x_1 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $x_3 = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$*, a nije zadovoljena ako odaberemo* $x_1 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_2 = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $x_4 = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$*. Analizom svih mogućih permutacija vidi se da su u Galoisovoj grupi ove jednadžbe samo njih četiri (tj. samo četiri ne mijenjaju nijedan mogući algebarski identitet kojeg zadovoljavaju* x_1, x_2, x_3, x_4*)): identiteta* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *te permutacije* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_3, x_4, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_2, x_1, x_4, x_3)$ *i* $(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_4, x_3, x_2, x_1)$*. Ta grupa je (do na izomorfizam) poznata kao Kleinova četvorna grupa.*

Galois je otkrio da su za pitanje rješivost algebarske jednadžbe bitne posebne podgrupe grupe svih permutacija tih rješenja (danas zvane normal-

[4]Dvije grupe su izomorfne ako do na to kako im zovemo elemente i kako označavamo operaciju nema razlike među njihovim „tablicama množenja", vidi i str. 105.



Slika 5.4: Arthur Cayley, 19. st.

nim podgrupama). Galoisovi rezultati postali su dostupni javnosti tek kad ih je objavio Liouville. Godinu ranije, 1845., Cauchy je objavio rad koji sadrži prvu definiciju grupe. Radi se o već spomenutom njegovom djelu o permutacijama.

Ipak, trajalo je još dvadesetak godina dok su matematičari shvatili važnost koncepta grupe. Čini se da je prvi koji je uočio važnost Jordan krajem 1860-ih godina prvi istaknuo važnost grupa permutacija. Nakon Jordanovih rezultata, tokom 1870-ih godina, ustaljuje se naziv grupa. Temeljem teorije grupa, preciznije preko grupa preslikavanja karakterističnih za pojedinu vrstu geometrije, Klein je u svom Erlangenskom programu 1872. klasificirao geometrije.

S druge strane, engleski matematičar **Arthur Cayley** je još 1849. objavio rad u kojem povezuje vlastite ideje o permutacijama s Cauchyjevima. Pet godina kasnije objavljuje rad kojim dokazuje iznimno razumijevanje apstraktnih grupa – i to u doba kad su jedini poznati primjeri grupa bile grupe permutacija. Cayley tako 1854. definira apstraktnu grupu i opisuje ju „tablicom množenja" (danas poznatom kao Cayleyeva tablica). Dao je primjere tih tablica za neke grupe permutacija te uočio da matrice i kvaternioni[5] čine grupe.

Cayley razmatra skup simbola θ koji djeluju na sustav $(x, y, \ldots)$ rezultirajući s $\theta(x, y, \ldots) = (x', y', \ldots)$, gdje su $x', y', \ldots$ funkcije od $x, y, \ldots$. On definira simbol 1 kao onaj koji ne mijenja sustav $(x, y, \ldots)$. Zatim definira simbol $\theta\phi$ kao onaj koji predstavlja djelovanje prvo ϕ pa onda θ i primjećuje da ne mora vrijediti $\phi\theta = \theta\phi$. Na kraju takav skup zove grupom ako vrijedi asocijativnost i ako je $\theta\phi$ sumbol iz istog skupa. Primijetimo da je ovaj pokušaj definicije prilično neuspio i nepotrebno kompliciran: Cayleyevi

[5]Kvaternioni su poopćenje kompleksnih brojeva koje je otkrio sir William Rowan Hamilton, vidi str. 112.

simboli su očigledno vrsta funkcija i binarna operacija je kompozicija, a komponiranje funkcija je uvijek asocijativno.

Već smo spominjali izomorfnost grupa, a Cayleyeve tablice daju najjednostavniji način objašnjenja tog pojma. Npr. grupa $\{0, 1\}$ s operacijom binarnog zbrajanja ima Cayleyevu tablicu

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

Ako bismo izmislili grupu s elementima $\triangle$ i $\odot$ s operacijom $\heartsuit$ tako da je

$\heartsuit$	$\triangle$	$\odot$
$\triangle$	$\triangle$	$\odot$
$\odot$	$\odot$	$\triangle$

usporedbom gornje dvije Cayleyeve tablice vidimo da se razlikuju samo po oznakama, ali ne i po smislu, dakle su grupe koje predstavljaju izomorfne.

Cayleyevi rezultati iz 1854. su bili previše ispred vremena te u tom trenutku nisu imali bitnog utjecaja, no kasnije (1878.) je Cayley na istu temu objavio još četiri rada (jedan imena *The theory of groups – Teorija grupa*). Tada je napisao: *grupa je definirana pravilom kompozicije svojih elemenata.* U to doba apstraktne grupe su već bile u središtu matematičkog interesa, a Cayleyevi rezultati su bitno unaprijedili teoriju grupa. Među ostalim, u tim je radovima dokazao da je svaka konačna grupa izomorfna nekoj grupi permutacija (Cayleyev teorem). Tokom 1880ih teorija grupa se dalje ubrzano razvija te je do kraja 19. stoljeća postala jedna od najvažnijih matematičkih teorija. Njen daljnji razvoj u 20. stoljeću posebno su olakšala dva sveska *Lehrbuch der Algebra – Udžbenika algebre* koja je 1895. i 1896. objavio Heinrich Weber (1842. - 1913.). Godine 1897. Burnside[6] precizira definiciju grupe, dajući definiciju vrlo sličnu suvremenoj (izostavlja zahtjev postojanja neutralnog elementa, no to se može izvesti iz zahtjeva invertibilnosti elemenata i zatvorenosti binarne operacije). Pritom Burnside i dalje razmatra grupe čiji elementi su funkcije.

S druge strane, 1870-ih Kronecker i Weber daju pokušaje definicija grupe u kontekstu klasa u algebarskoj teoriji brojeva. Taj i drugi utjecaji doveli su do suvremene definicije apstraktne grupe u kojoj se više ne razmatra priroda elemenata grupe.

[6]William Burnside, 1852. - 1927., prvi je izdao pregled teorije grupa na engleskom jeziku i razvio je na suvremen apstraktan način.

5.2 Matrice i determinante

Počeci teorije matrica i determinanti vezani su za rješavanje sustava linearnih jednadžbi. Takvi problemi bili su poznati i rješavani još u doba starih civilizacija, a Kinezi oko 2. st. pr. Kr. koeficijente sustava zapisivali su u tablicu koja je u biti transponirana matrica sustava (u smislu u kojem se taj pojam danas koristi) i rješavali sustav transformirajući tu tablicu postupkom koji je *de facto* Gaussova metoda eliminacija. U doba renesanse Cardano je dao Cramerovo pravilo[7] za sustave s dvije linearne jednadžbe i dvije nepoznanice.

Nakon dugog razdoblja u kojem na ovu temu nije otkriveno ništa bitno novo, godine 1683. pojavljuju se determinante i to istovremeno u Europi i u Japanu. Japanski matematičar **Takakazu Shinsuke Seki** (1642. - 1708.) objavio je djelo koje sadrži tablične metode rješavanja sustava slične starokineskim. Uz to vezano za rješavanje jednadžbi (ne i sustava) koristi determinante. Nije dao nikakav naziv determinanti, ali je opisao računanje determinanti do veličine 5×5. Iste godine je **Leibniz** u pismu l'Hôpitalu napisao: „sustav

$$10 + 11x + 12y = 0$$

$$20 + 21x + 22y = 0$$

$$30 + 31x + 32y = 0$$

ima rješenje jer je $10 \cdot 21 \cdot 32 + 11 \cdot 22 \cdot 30 + 12 \cdot 20 \cdot 31 = 10 \cdot 22 \cdot 31 + 11 \cdot 20 \cdot 32 + 12 \cdot 21 \cdot 30$". Ako znamo da je Leibniz brojevima označio pozicije koeficijenata tj. da njegove oznake ij znače što i suvremena a_{ij} (recimo, 21 je koeficijent koji se pojavljuje u drugoj jednadžbi uz prvu nepoznanicu), vidimo da je zapravo iskazao uvjet da je determinanta matrice koeficijenata jednaka nuli. Leibniz je, želeći naći što zgodniji zapis, puno eksperimentirao s različitim načinima zapisivanja koeficijenata sustavâ. Leibniz je također znao da se determinanta može razviti po proizvoljnom stupcu (dakle, Laplaceov razvoj), a dokazao je i Cramerovo pravilo.

Maclaurin je 1730-ih godina dokazao prve objavljene rezultate o determinantama (objavljeni tek 1748.). Radilo se o Cramerovom pravilu za 2×2 i 3×3 sustave s naznakama kako bi se postupilo u slučaju 4×4 sustava. Općenito pravilo objavio je 1750. švicarski matematičar **Gabriel Cramer** (1704. - 1752.), po kome je to pravilo konačno i nazvano. Pravilo je otkrio pokušavajući naći jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi kroz određeni broj točaka. Iako je detaljno opisao pravilo, nije ga dokazao.

[7] Cramerovo pravilo su formule za rješenje sustava linearnih jednadžbi koji ima jednako mnogo jednadžbi koliko i nepoznanica, a u kojima se komponente rješenja dobivaju kao kvocijenti određenih determinanti.

Od tog doba nadalje rezultati o determinantama počinju se redovno objavljivati. Metode računanja determinanti objavili su Bezout[8] 1764. i Vandermonde[9] 1771., a **Laplace** 1772. konstatira da su njihove metode nepraktične i opisuje Laplaceov razvoj determinante. Determinantu naziva rezultantom, što je zanimljivo jer je isti naziv koristio Leibniz za neke kombinatorne sume koje su se pojavljivale u računu determinanti, no po svemu sudeći Laplace nije znao za Leibnizove rezultate. Godin kasnije Lagrange proučava 3×3 determinante tablica kojima su elementi funkcije, a ne brojevi. Lagrange je prvi koji je determinantu interpretirao kao volumen: ako su vrhovi tetraedra ishodište te tri točke $M(x,y,z)$, $M'(x',y',z')$ i $M''(x'',y'',z'')$, njegov volumen je

$$V = \frac{z(x'y''-y'x'')+z'(yx''-y''x)+z''(xy'-yx')}{6}$$

tj.

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Naziv determinanta uveo je **Gauss** u svom znamenitom djelu *Disquisitiones Arithmeticae* (1801.), no nije ga koristio u suvremenom značenju. U istom djelu opisuje množenje matrica i određivanje inverzna matrice. Pritom su Gaussove matrice isključivo tablice koeficijenata kvadratnih formi[10]. Baveći se u razdoblju 1803. - 1809. problemom određivanja putanje asteroida Pallasa, Gauss je dobio sustav tipa 6×6 koji je riješio metodom koju danas zovemo Gaussova metoda eliminacija. Naziv determinanta u suvremenom smislu prvi koristi Cauchy u radu iz 1812. u kojem je dokazao i pravilo da je determinanta produkta matrica produkt njihovih determinanti. To je pravilo danas poznato kao **Binet-Cauchyjev teorem**; Binet[11] je dokaz dao gotovo istovremeno, ali je bi manje zadovoljavajući. U kontekstu kvadratnih formi, Cauchy je 1826. za matricu (a_{ij}) koristio naziv tablica. Odredio je njene svojstvene vrijednosti i dao rezultate o dijagonalizaciji matrice u terminima mogućnosti preoblikovanja kvadratne forme $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$ u oblik $\sum_i b_iy_i^2$. U tom je kontekstu dokazao da se svaka realna simetrična matrica[12] može di-

[8] Étienne Bezout, 1730. - 1783., francuski matematičar, najpoznatiji je po svom teoremu o broju rješenja polinomijalnih jednadžbi.

[9] Alexandre-Théophile Vandermonde, 1735. - 1796., francuski glazbenik i kemičar, surađivao je s Bezoutom i Lavoisierom, u matematici je poznat kao prethodnik Galoisove teorije i teorije uzlova te bavljenju determinantama.

[10] Kvadratne forme su izrazi oblika $\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$.

[11] Jacques Philippe Marie Binet, 1786. - 1856., francuski matematičar koji se bavio temeljima teorije matrica.

[12] Kvadratna matrica je simetrična ako je jednaka svojoj transponiranoj matrici.

Slika 5.5: Karl Gustav Jacob Jacobi, 19. st.

jagonalizirati. Pritom, ideja svojstvenih vrijednosti se prvi put pojavila u d'Alembertovim radovima o sustavima linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Ideja determinante postaje poznata u širim krugovima s tri rada njemačkog matematičara **Karl Gustav Jacob Jacobija** (1804. - 1851.), koji je inače najpoznatiji po svojim rezultatima o eliptičkim funkcijama i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda. U tim radovima dao je opću, algoritamsku definiciju determinante (neovisno o tom jesu li u njoj brojevi ili funkcije). Tako je uveo i Jakobijan, determinantu matrice parcijalnih derivacija komponenti vektorske funkcije[13] po njenim varijablama. Ograničavanje determinanti okomitim crtama uveo je Cayley, koji je postavio temelje modernoj teoriji matrica. Naziv matrica prvi je koristio Sylvester 1850.

Cayleyev rad na matricama imao osobito velike posljedice za matematiku i njene primjene: poslužio je kao temelj kvantne mehanike, koju je razvio Heisenberg[14] 1925. Godine 1858. Cayley je dao prvu apstraktnu definiciju matrice. Definirao je operacije s matricama. Prvi je uveo množenje matrica. Godine 1853. opisao je određivanje inverza matrice preko determinanti. Dokazao je **Cayley-Hamiltonov teorem** za matrice s dva reda i dva stupca (kvadratne matrice reda 2) i za one s tri reda i tristupca (kvadratne matrice reda 3). Za kvadratne matrice reda 4 dokazao ga je Hamilton, a za općenite kvadratne matrice Frobenius[15] 1896. Taj teorem kaže da svaka kvadratna

---

Transponirana matrica matrice A je matrica A^t u kojoj su retci matrice $A = (a_{ij})$ zapisani kao stupci tj. na poziciji (i, j) u A^t nalazi se element a_{ji}.

[13] Ovdje pod vektorskom funkcijom podrazumijevamo funkciju više varijabli koja tim varijablama pridružuje rezultat koji ima dvije ili više realnih koordinata, primjerice funkcija zadana formulom $f(x, y) = (xy, x + y)$. Njene komponente su onda realne funkcije koje određuju njen rezultat, u navedenom primjeru to su funkcije koje paru (x, y) pridružuju broj xy odnosno broj $x + y$.

[14] Werner Heisenberg, 1901. - 1976., stvorio je matričnu mehaniku kao prvu verziju kvantne mehanike.

[15] Ferdinand Georg Frobenius, 1849. - 1917., njemački matematičar, najpoznatiji je

matrica zadovoljava svoju karakterističnu jednadžbu. Karakteristična jednadžba kvadratne matrice A reda[16] n je jednadžba

$$det(A - xI) = 0$$

gdje det označava determinantu matrice, I je jedinična matrica reda n, a x je nepoznanica (broj). Npr. za

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

je $A - xI = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix}$ pa je[17]

$$det(A - xI) = (2 - x) \cdot (-x) - 1 \cdot (-1) = x^2 - 2x + 1$$

tj. karakteristična jednadžba od A je

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Cayley-Hamiltonov teorem kaže da A možemo uvrstiti na mjesto x-a u nju te da ako slobodni član shvatimo kao slobodni član puta jedinična matrica, dobit ćemo istinitu matričnu jednakost:

$$A^2 - 2A + 1 \cdot I = 0$$

(desno oznaka 0 predstavlja nulmatricu odgovarajuće veličine tj. matricu $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$).

5.3 Osnovni teorem algebre

Jedan od temeljnih teorema o polinomima je da svaki polinom stupnja n (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva (ukoliko svaku nultočku brojimo onoliko puta kolika joj je kratnost[18]). Kompleksni brojevi su se pojavili u renesansi (Cardano,

---

po doprinosima u teoriji grupa i teoriji diferencijalnih jednadžbi. Utemeljio je teoriju reprezentacija grupa.

[16] Matrica je kvadratna ako ima jednako mnogo redaka i stupaca, a taj broj redaka odnosno stupaca zove se njenim redom.

[17] Determinanta kvadratne matrice reda 2 je $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

[18] Kratnost nultočke c polinoma $p(x)$ je najveći eksponent n takav da je $p(x)$ djeljivo s $(x - c)^n$. Primjerice, 1 je nultočka kratnosti 2 polinoma $(x - 1)^2(x + 3)$.

Bombelli). U doba renesanse dani su i prvi primjeri polinomijalnih jednadžbi stupnja n s n rješenja (Viète). Iako je još Thomas Harriot znao da polinom kojemu je nultočka x_0 sadrži faktor $(x-x_0)$, to je postalo poznato tek kad je to u *La Géométrie* naveo Descartes. Descartes navodi i da se može zamisliti da svaka jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja, ali da ta „zamišljena rješenja" ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.

Nešto ranije, 1629., flamanski matematičar **Albert Girard** (1595. - 1632.) ustvrdio je da svaka jednadžba stupnja n ima n rješenja, s tim da dozvoljava da se ta rješenja nalaze u nekom još većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva. Tu su njegovu tvrdnju matematičari prihvatili kao očitu. Posljedično, gotovo 200 godina se nije pokušavalo dokazati da *postoji n rješenja*, nego da *su rješenja kompleksni brojevi.*

Leibniz je 1702. mislio da je dokazao da osnovni teorem algebre ne vrijedi: tvrdio je da se $x^4 + a^4$ ne može napisati kao produkt dva kvadratna polinoma s realnim koeficijentima (tj., što je ekvivalentno, kao produkt četiri linearna polinoma s kompleksnim koeficijentima). Leibnizova greška bila je u tome da je mislio da se $\sqrt{i}$ ne može zapisati u obliku $\alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tu je grešku otkrio i ispravio Euler 1742. **Euler** je dokazao osnovni teorem algebre za polinome s realnim koeficijentima do stupnja 6, a pokušao ga je (1749.) dokazati i za polinome viših stupnjeva. Nešto ranije (1746.) **d'Alembert** je dao prvi ozbiljniji pokušaj dokaza osnovnog teorema algebre konstruirajući niz kompleksnih brojeva koji konvergira prema nultočki polinoma. Dokaz je imao više nedostataka, od kojih vrijedi spomenuti da je bez dokaza koristio lemu dokazanu sto godina kasnije kao posljedicu osnovnog teorema algebre. **Lagrange** je 1772. prigovorio Eulerovom dokazu i svojim znanjem o permutacijama popunio rupe u Eulerovom dokazu, no i on se zapleo u istu grešku kao i matematičari prije njega: pretpostavljao je da polinom ima n nultočki i dokazivao njihova svojstva, primjerice da su one kompleksni brojevi. Tako pristupa i Laplace, koji je dao drugačiji i bitno elegantniji dokaz da su korijeni polinoma kompleksni.

Prvi pravi dokaz osnovnog teorema algebre pripisuje se **Gaussu**. U svom doktoratu 1799. dao je topološki dokaz i svoje primjedbe na ranije dokaze. Gauss je svakako prvi koji je primijetio fundamentalnu grešku svojih prozivnika, a to je propust dokaza egzistencije n korijena polinoma stupnja n. Ovaj Gaussov dokaz je imao više rupa, no 1816. je Gauss dao drugi i točan dokaz temeljen na Eulerovim idejama, a iste godine dao je i treći, ponovno topološki dokaz. Prvi dokaz za polinome s kompleksnim koeficijentima dao je također Gauss (1849.).

U međuvremenu je (1814.) dokaz dao i švicarski računovođa **Jean Robert Argand** (1768. - 1822.). Taj dokaz je vjerojatno najjednostavniji od svih dokaza tog doba, a temeljio se na d'Alembertovom pokušaju dokaza. Prvu varijantu tog dokaza objavio je još 1806. Argand je u povijesti matematike najpoznatiji po tome da je (1812.) uveo kompleksnu ravninu i interpretaciju množenja s i kao rotacije za pravi kut. Zapravo je Argand bio i prvi koji je uveo modul kompleksnog broja, no ta se ideja obično pripisuje Cauchyju. Cauchy je 1820. objavio knjigu o matematičkoj analizi u kojoj je cijelo jedno poglavlje bez da spomene Arganda posvetio Argandovom dokazu osnovnog teorema algebre.

Nakon što je osnovni teorem algebre dokazan ostalo je otvoreno pitanje postoji li još neki veći skup brojeva nego su to kompleksni brojevi. Tako je primjerice Gauss vjerovao da postoji hijerarhija poopćenjâ kompleksnih brojeva među kojima su „obični" kompleksni brojevi najjednostavniji te ih je zvao „sjenom sjena". Godine 1863. Weierstrass je dokazao da je polje kompleksnih brojeva jedino polje[19] koje proširuje polje realnih brojeva. Drugim riječima, od $\mathbb{C}$ nema nekog većeg skupa koji sadrži skup $\mathbb{R}$ i koji bi imao ista svojstva zbrajanja i množenja.

5.4 Vektorski prostori

Podsjetimo se da su u klasičnom (fizikalnom) smislu vektori veličine koje imaju iznos, smjer i orijentaciju. Takve vektore vizualno prikazujemo strelicama. Apstraktnije, vektori su elementi vektorskih prostora tj. skupova na kojima je definirano međusobno zbrajanje njihovih elemenata i množenje tih elemenata skalarima (brojevima) tako da pritom vrijede svojstva tih operacija kakva vrijede za zbrajanje vektora-strelica i za njihovo množenje brojevima. Ako su skalari kojima množimo vektore realni brojevi, govorimo o realnim vektorskim prostorima, a ako su ti skalari kompleksni brojevi, govorimo o kompleksnim vektorskim prostorima. Linearna kombinacija nekih vektora je izraz koji je zbroj tih vektora pomnoženih nekim skalarima. Skup vektora je linearno nezavisan ako se nijedan od tih vektora ne može zapisati kao linearna kombinacija ostalih. Dimenzija vektorskog prostora je najveći mogući broj elemenata nekog linearno nezavisnog skupa u tom vektorskom prostoru.

Primjer 9 *Promotrimo prostor vektora-strelica u ravnini. Dva vektora su linearno zavisna ako su proporcionalni (tj. istog smjera), a inače su linearno nezavisni. Svaka tri vektora su uvijek linearno zavisna tj. kad god imamo tri vektora* $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ *za bar jedan od njih, recimo* $\overrightarrow{c}$ *možemo naći realne*

[19]Polje je algebarska struktura koja se sastoji od skupa S i dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$ na tom skupu koje zadovoljavaju svojstva analogna svojstvima zbrajanja i množenja na skupu realnih brojeva.

brojeve α, β takve da je $\overrightarrow{c} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b}$. Dakle, najviše dva vektora-strelice u ravnini mogu biti linearno nezavisni te se radi o dvodimenzionalnom realnom vektorskom prostoru.

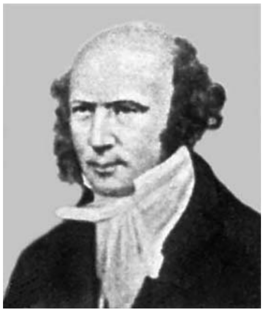
Kao što je rečeno ranije, koordinatne metode u geometriju uveli su Descartes i de Fermat u 17. stoljeću. Kao prethodnika vektorskog računa treba spomenuti i renesansnog matematičara Simona Stevina koji je u 16. stoljeću analizirao princip geometrijskog zbrajanja sila, tj. zakon paralelograma. Ipak, još će puno vremena proči do uvođenja vektora: počeci koncepta vektora mlađi su od koncepta determinante.

Ideje vektora počele su se razvijati tek u 19. stoljeću. **Bernhard Bolzano** 1804. uzima točke, pravce i ravnine kao nedefinirane objekte i definira operacije s njima te tako postiže novu razinu apstrakcije u geometriji. Time otvara put prema aksiomatizaciji geometrije i apstrakciji potrebnoj za uvođenje vektorskih prostora. **August Ferdinand Möbius** 1827. objavljuje geometrijsko djelo u kojem uvodi baricentričke koordinate. Za zadan trokut ABC s masama a, b, c u svojim vrhovima težište označimo s T. Möbius pokazuje da je svaka točka T u ravnini određena masama koje treba staviti u vrhove A, B, C tako da T bude težište tog trokuta: kaže se da T ima baricentričke koordinate $[a, b, c]$. U ovom djelu Möbius promatra usmjerene veličine, dakle se radi o ranom obliku vektora. Deset godina kasnije Möbius objavljuje djelo u kojem daje jasnu ideju rastava vektora obzirom na dvije osi. Između objave ta dva Möbiusova djela Giusto Bellavitis (1803. - 1880.) je 1832. objavio djelo u kojem za dvije točke A i B razlikuje dužine AB i BA. Takve dužine zove ekvipolentnim ako su paralelne i jednake tj. ako predstavljaju isti vektor. Definirao je ekvipolentnu sumu dužina tj. zbrajanje vektora. To se može smatrati prvom pojavom vektorskog prostora.

Koristeći Argandov prikaz kompleksnih brojeva kao točaka u ravnini, **sir William Rowan Hamilton** (1805. - 1865.) godine 1833. interpretira skup kompleksnih brojeva kao dvodimenzionalni realni prostor, naravno ne u toj modernoj terminologiji. Zatim je Hamilton pokušavao poopćiti množenje na trodimenzionalni realni prostor i tako je deset godina kasnije Hamilton je otkrio primjer četverodimenzionalnog realnog vektorskog prostora: **kvaternione**. Prema vlastitim riječima, Hamilton je 16. listopada 1843. prolazio sa suprugom uz *Royal Canal* u Dublinu kad mu se u glavi stvorila ideja kvaterniona te nije mogao odoliti impulsu da u kamen mosta *Broome Bridge* ureže formule

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kvaternioni su brojevi oblika $x + yi + zj + wk$ s $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ gdje su i, j, k brojevi sa svojstvima $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$.



Slika 5.6: sir William Rowan Hamilton, 19. st.

Preciznije, množenje kvaterniona je zadano tablicom

$\cdot$	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

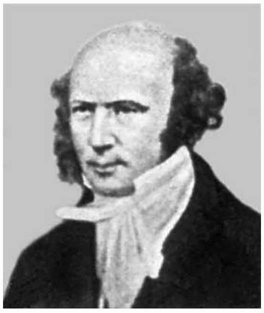
te svojstvom distributivnosti[20]. Množenje kvaterniona nije komutativno[21] pa iako oni poopćavaju kompleksne brojeve, više se ne radi o algebarskoj strukturi polja. Već smo rekli da je 1863. (dakle, dvadeset godina nakon otkrića kvaterniona) Weierstrass dokazao da je polje kompleksnih brojeva jedino polje koje sadrži realne brojeve tj. da su kompleksni brojevi jedino poopćenje realnih brojeva koje zadržava sva uobičajena svojstva zbrajanja i množenja. Hamilton je prvi koji koristi riječ vektor za usmjerenu dužinu (u jednom vrlo teško čitljivom djelu iz 1853.). Nakon otkrića kvaterniona, za koje je smatrao da će revolucionirati matematičku fiziku, Hamilton je ostatak života proveo baveći se kvaternionima.

Dalje poopćenje algebre uvođenjem matrica daje, kako je opisano ranije, Cayley, koji 1858. uočava i da se kvaternioni mogu matrično prikazati. Napomenimo ovdje da je uz Cayleya s apstraktnom algebrom matrica te Hamiltona s apstraktnom algebrom kvaterniona i vektora za razvoj apstraktne algebre vrlo važan i Boole[22] koji uvodi apstraktno množenje u logici.

[20]Distributivnost množenja prema zbrajanju znači da vrijedi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ i $(a + b) \cdot c = a \cdot c + a \cdot b$ za sve elemente a, b, c skupa na kojem smo definirali zbrajanje i množenje.

[21]Operacija $*$ je komutativna ako za sve elemente a i b na koje se primjenjuje vrijedi $a * b = b * a$.

[22]George Boole, 1815. - 1864., engleski matematičar i logičar, sveo je logiku na algebru i tako je uključio u matematiku.



Slika 5.7: Hermann Grassmann, 19. st.

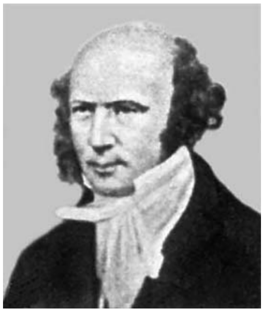
Godine 1867. **Edmond Laguerre** (1834. - 1886.) u pismu Hermiteu[23] opisuje matrice sustava i definira operacije s njima. Laguerre time pokušava objediniti algebarske strukture kompleksnih brojeva, kvaterniona, te radove Galoisa i Gaussa.

Hermann Günter Grassmann (1809. - 1877.) motiviran Möbiusovim baricentričkim koordinatama stvara originalno djelo s velikim pomakom prema geometriji bez koordinata. Prva verzija tog djela pod nazivom *Die Ausdehnungslehre* iz 1844. je bila jako teško čitljiva, te ju je Grassmann preradio i revidiranu verziju izdao 1862. Grassmann za apstraktne (tj. ne pobliže definirane) objekte definira algebarske operacije (zbrajanje, množenje skalarom i međusobno množenje) te se u njegovom djelu mogu naći sva poznata svojstva vektorskih prostora, no kako je definirao i međusobno množenje objekata, algebarske strukture kojima se Grassmann bavi su po današnjoj terminologiji algebre[24]. U njegovim radovima su jasno razrađene i ideje linearno zavisnih i linearno nezavisnih skupova te ideja dimenzije (iako ne koristi te nazive), a u prvoj verziji svog djela iz 1844. Grassmann koristi i skalarni produkt. Slične radove objavili su neovisno o Grassmannu Cauchy i Saint-Venant[25]. Saint-Venant je svoj rad u kojem množi dužine na način analogan Grassmannovom objavio 1845. Kad je Grassmann pročitao taj rad i vidio da Saint-Venant nije upoznat s njegovim radom iz 1844., poslao je kopije bitnih djelova iz svog rada Cauchyju s molbom da jednu kopiju proslijedi Saint-

[23]Charles Hermite, 1822. - 1901., francuski matematičar, bavio se teorijom funkcija i primijenio je eliptičke funkcija na jednadžbe petog stupnja. Godine 1873. dao je prvi dokaz transcendentnosti broja e.

[24]Algebra je vektorski prostor u kojem je dodatno definirano i množenje među elementima koje je distributivno prema zbrajanju i za koje vrijedi $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ za sve skalare α i elemente a i b iz te algebre.

[25]Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant, 1797. - 1886., francuski matematičar i fizičar, postavio je i analizirao parcijalne diferencijalne jednadžbe poznate kao Saint-Venantove koje su danas temeljne jednadžbe hidrauličkog inženjerstva.



Slika 5.8: Giuseppe Peano, 19./20. st.

Venantu. No, Cauchy je po svom običaju bez citiranja Grassmanna 1853. objavio te rezultate. Grassmann je poslao pritužbu francuskoj Akademiji znanosti, koja je 1854. uspostavila odbor za utvrđivanje tko ima prioritet, no taj odbor nikad nije predao izvještaj.

Prvu aksiomatsku definiciju vektorskog prostora daje talijanski matematičar **Giuseppe Peano** (1858. - 1932.) u svom djelu *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* iz 1888. U toj knjizi opisuje osnove algebre skupova, a u devetom poglavlju navodi aksiome vektorskih prostora. Peano pritom se poziva na Leibnizove, Möbiusove, Grassmannove i Hamiltonove rezultate. He credits Leibniz, Möbius's 1827 work, Grassmann's 1844 work and Hamilton's work on quaternions as providing ideas which led him to his formal calculus. Peanov zapis aksioma vektorskog prostora gotovo se ne razlikujue od njihovog današnjeg zapisa. Prvi aksiom definira svojstva jednakosti objekata: $a = b$ ako i samo ako je $b = a$ te ako je $a = b$ i $b = c$, onda je $a = c$. Drugi aksiom definira zbroj dva objekta a i b kao objekt $a+b$ iz istog sustava, gdje vrijedi: ako $a = b$, onda je $a + c = b + c$ i nadalje vrijedi $a + b = b + a$ i $a+(b+c) = (a+b)+c$, a zajednička vrijednost zadnje jednakosti se označava $a + b + c$. Treći aksiom definira množenje skalarom: ako je a objekt promatranog sustava i m prirodan broj, ma je suma m objekata jednakih a; lako se vidi da za objekte $a, b \dots$ iz sistema i prirodne brojeve $m, n, \dots$ vrijedi: ako $a = b$ onda $ma = mb$, nadalje $m(a + b) = ma + mb$, $(m + n)a = ma + na$, $m(na) = mna$, $1a = a$; pretpostavlja se da za svaki realan broj m oznaka ma ima smisla tako da vrijede sva navedena svojstva. Peano dalje navodi postojanje nulobjekta 0 sa svojstvom $0a = 0$ i kaže da $a - b$ znači $a + (-b)$ te da se lako vidi $a - a = 0$ i $0 + a = a$. Svaki sustav objekata koji zadovoljava gornje uvjete Peano zove linearnim sustvaom. Dalje Peano definira zavisne i nezavisne objekte te dimenziju: broj dimenzije linearnog sustava je maksimalni broj linearno nezavisnih objekata u tom sustavu. Dokazao je da konačnodimenzionalni[26] linearni sustavi imaju bazu i dao primjere beskonačnodimenzionalnih linearnih sustava tj. vektorskih prostora. Definirao je i linearne operatore i opisao kako dobiti njihov matrični prikaz te kako ih zbrajati i množiti. Peano uočava i da polinomi stupnja n čine $(n+1)$-dimenzionalan linearni sustav, a svi polinomi čine beskonačnodimenzionalan linearni sustav. Ipak, beskonačnodimenzionalni vektorski prostori počet će se intenzivno proučavati tek dvadesetih godina 20. stoljeća nakon uvođenja funkcionalne analize i pojave kvantne mehanike.

[26]Vektorski prostor je konačnodimenzionalan ako je broj elemenata u njegovoj bazi konačan, prirodan broj.

Poglavlje 6

Teorija brojeva u novom vijeku

Teorija brojeva je vrlo stara matematička disciplina – njeni začeci sežu u doba pitagorejaca. Mnoge rezultate iz teorije brojeva pokazali su kako antički Grci, tako i kasnije arapski matematičari. U evropskom srednjem vijeku jedini značajniji rezultati bili su Fibonaccijevi i Stifelovi. Nakon renesanse, od početka 17. stoljeća, dolazi do naglog daljeg razvoja teorije brojeva.

Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1587. - 1638.) je bio pisac knjiga iz područja zabavne matematike i otkrio je jednu metodu konstrukcije magičnih kvadrata. Za teoriju brojeva značajan je po svom prijevodu Diofantovog djela *Arithmetica* (1621.), koji je i komentirao. Osim toga je napisao i vlastito djelo u kojem daje potpun pregled teorije diofantskih jednadžbi prvog stupnja, za koje daje dosta kompliciranu metodu rješavanja pomoću tada još slabo poznatih verižnih razlomaka.

Iako nije stvorio povezanu teoriju brojeva, za obnovu interesa za tu matematičku disciplinu posebno je zaslužan de Fermat. **Pierre de Fermat** (1601. - 1665.) je po struci bio pravnik i radio je kao savjetnik u francuskom parlamentu i kao sudac, a u slobodno vrijeme se bavio matematikom. Već smo ga spomenuli kao suotkrivača analitičke geometrije i teorije vjerojatnosti

Slika 6.1: Pierre de Fermat, 17. st.

te jednog od najvažnijih neposrednih prethodnika otkriča infinitezimalnog računa. Svoje rezultate nije objavljivao, već ih je zapisivao na marginama knjiga ili u pismima prijateljima, posebice Mersenneu. Teorijom brojeva počeo se baviti pod utjecajem Bachetovog prijevoda *Arithmetica*-e. U svom primjerku tog prijevoda zabilježio je niz komentara, među kojima je najznamenitiji **veliki Fermatov teorem**:

Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom. Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak, da ga zapišem.

Mi bismo tu tvrdnju zapisali ovako: Za prirodan broj n veći od 2 ne postoje cijeli brojevi x, y, z različiti od nule takvi da je

$$x^n + y^n = z^n.$$

Ovakvi de Fermatovi zapisi na marginama postali su poznati tek kad je njegov sin Samuel 1670. objavio izdanje Diofantove *Arithmetica*-e skupa s očevim bilješkama. Osim tih bilješki na rubovima knjiga, nakon de Fermatove smrti nađeno je i mnogo papira s nesređenim rezultatima.

Pierre Fermat je diplomirao pravo i 1631. postao član parlamenta u Toulouseu, čime je ostvario pravo na titulu *de* u imenu: mijenja ime u Pierre de Fermat. Još u doba studija počeo se baviti matematičkim problemima i iz tog doba potječu njegovi prvi rezultati o ekstremima funkcija. Tokom svog rada u parlamentu postepeno je napredovao do viših pozicija te je 1652. dosegao najviši mogući položaj na kaznenom sudu. Ipak, ta napredovanja su manje posljedica posebne ambicioznosti ili zasluga, a više tada glavnog kriterija: senioriteta.

Imao je niz matematičkih prijatelja, a jedan od njih, Pierre de Carcavi, je 1636. ostvario kontakt sa znamenitim matematičarem Mersenneom, poznatim ponajviše jer je oko sebe okupio sve najbolje matematičare tog doba i puno doprinijeo komunikaciji matematičkih ideja. Carcavi je zainteresirao Mersennea za de Fermata te Mersenne uspostavlja pismenu komunikaciju s de Fermatom. U jednom od svojih pisama Mersenneu de Fermat je postavio hipotezu da su brojevi oblika $2^n + 1$ prosti kad god je n potencija od 2. To je provjerio za $n = 1, 2, 4, 8, 16$, a znao je i da takvi brojevi nisu prosti ako n nije potencija od 2. Ipak, stotinjak godina kasnije Euler je pokazao da Fermatova hipoteza nije točna: broj $2^{32} + 1 = 4294967297$ je djeljiv s 641, dakle nije prost. Danas se prosti brojevi koji su oblika $2^n + 1$ za n potenciju od 2 zovu **Fermatovi brojevi**.

U pismenoj komunikaciji tipičan je de Fermatov stil: u svojim pismima poziva druge da pokažu rezultate koje je on već dobio. De Fermatova matematička reputacija brzo raste, no zbog nesklonosti prema sređivanju rezultata nije objavljivao svoje rezultate. Ipak, neki rezultati su objavljeni kao dodaci djelima drugih matematičara. S druge strane, rast de Fermatova ugleda i kompliciranost problema koje je riješio počeli su izazivati prigovore i ljutnju drugih matematičara. Među tim sukobima najpoznatiji je onaj s Descartesom, koji je opisan u poglavlju o otkriću analitičke geometrije.

U razdoblju 1643. – 1654. de Fermat nije komunicirao s ostalim znanstvenicima zbog prevelike količine posla u parlamentu, no i dalje se bavio matematikom, posebice teorijom brojeva. Nastavio je s postavljanjem matematičkih problema drugim matematičarima, ponajviše iz teorije brojeva, no kako to područje mnogi nisu smatrali bitnim nije bilo velikog odaziva. Na molbu jednog Descartesovog studenta koji je skupljao Descartesovu korespondenciju, de Fermat ponovno pregledava svoja pisma iz doba sukoba s Descartesom te se ponovno vraća geometrijskim pitanjima vezanim za optiku. Tada je razvio zakon, poznat kao Fermatov, koji je jedan od temeljnih zakona optike: svjetlost uvijek ide najkraćim putem. Godine 1656. de Fermat započinje korespondenciju s Huygensom vezanu za teoriju vjerojatnosti. De Fermat je pokušavao Huygensa zainteresirati za teoriju brojeva, te je u svojim pokušajima da ga zainteresira naveo mnogo više svojih argumenata nego ikome prije. Tako je opisao svoju metodu neprekidnog silaska i njenu primjenu na dokaz da se svaki prost broj koji pri dijeljenju s 4 daje ostatak 1 može zapisati kao zbroj dva kvadrata prirodnih brojeva (npr. $5 = 2^2 + 1^2$). Metoda neprekidnog silaska koristi svojstvo dobrog uređaja prirodnih brojeva: ne postoji beskonačan padajući niz prirodnih brojeva. U de Fermatovim dokazima ipak nedostaju poneki koraci, koje je kasnije upotpunio Euler. Svoju metodu neprekidnog silaska de Fermat je iskoristio i u dokazu slučaja $n = 4$ velikog Fermatovog teorema.

Uz veliki, poznat je i **mali Fermatov teorem** kojeg je izrekao u jednom pismu 1640. godine: ako je p prost broj i a prirodan broj koji nije djeljiv s p, onda je $a^{p-1} - 1$ djeljiv s p. Prvi objavljeni dokaz ovog teorema dao je Euler. On ga formulira ovako:

Teorem 6 (Mali Fermatov teorem u Eulerovoj formulaciji) *Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p.*

Eulerov dokaz malog Fermatovog teorema svodi se na matematičku indukciju po a, s tim da dokaz radi jasnoće rastavlja na dokaze više lema. Smatrajući da je za $a = 1$ dokaz očit, bazu mu čini dokaz za slučaj $a = 2$: dokazuje da je za svaki neparan prost broj p broj $2^{p-1} - 1$ djeljiv s p. Tu koristi binomni teorem primijenjen na $(1 + 1)^{p-1}$. Od dobivene jednakosti oduzima 1 te primjenjuje pravilo za binomne koeficijente koje danas pišemo u obliku $\binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k} = \binom{p}{k}$ (u to doba još nije korištena oznaka $\binom{p}{k}$ za binomni koeficijent[1] već ga je Euler pisao u obliku $\frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot p-k+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$). Tako dobiva jednakost $2^{p-1}-1$ i zbroja od $\frac{p-1}{2}$ člana koji svi sadrže faktor p pa su djeljivi s p iz čega slijedi da je $2^{p-1}-1$ djeljiv s p. Ponudio je i alternativni jednostavniji dokaz u kojem od jednakosti $(1+1)^p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}$ oduzima 2 te dobiva da je $2^p - 2$ djeljivo s p iz čega, jer je p neparan, slijedi da je i $2^{p-1}-1$ djeljivo s p. Slučaj $a = 3$ Euler također posebno dokazuje, a zatim prelazi na korak indukcije i dokazuje: ako je p prost i dijeli $a^p - a$, onda dijeli i $(a+1)^p - a - 1$. Nakon toga objašnjava zašto je time dokaz gotov: ako iz djeljivosti $a^p - a$ s p slijedi djeljivost $(a+1)^p - a - 1$ s p, onda iz toga slijedi i djeljivost redom $(a+2)^p - a - 2$, $(a+3)^p - a - 3$, $\ldots$, $(a+b)^p - a - b$ s p. Posljedično je $a^p - a$ uvijek djeljivo s p, a ako p ne dijeli a onda iz toga slijedi da p dijeli $a^{p-1}-1$.

Dokazom malog Fermatova teorema je zapravo dokazan jedan smjer tzv. kineske hipoteze stare više od 2000 godina da je prirodan broj n prost ako i samo ako je $2^n - 2$ djeljiv s n. Njen drugi smjer nije istinit, npr. $2^{341}-2$ je djeljiv s 341, a $341 = 31 \cdot 11$. Mali Fermatov teorem je temelj mnogih rezultata iz teorije brojeva, a još i danas se koristi kao kompjuterska metoda provjere je li broj prost.

Iako nije stvorio povezanu teoriju brojeva, de Fermat je zaslužan za ponovno otkrivanje tog područja. Pokazao je i niz manjih rezultata iz teorije brojeva, primjerice da se svaki prost broj oblika $4n+1$ može na jedinstven način prikazati kao suma dva kvadrata (a još je Diofant pokazao da se $4n-1$ ni za koji prirodan n ne može zapisati kao suma dva kvadrata). Nadalje, pokazao je da se svaki prirodan broj može zapisati kao suma četiri kvadrata te da se svaki prost broj p na jedinstven način može zapisati kao razlika dva kvadrata prirodnih brojeva: $p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Naime, ako bi postojao još neki rastav $p = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, onda – budući je p prost – je jedina mogućnost $x - y = 1$, $x + y = p$, a rješenje tog sustava je upravo $x = \frac{p+1}{2}$ i $y = \frac{p-1}{2}$. Fermat je razvio i novu metodu za faktoriziranje velikih brojeva, koju je demonstrirao na primjeru $2027651281 = 44021 \cdot 46061$.

Vratimo se velikom Fermatovom teoremu. Danas se smatra da je vjerojatno da taj dokaz, bar ne takav da bi bio bez greške, de Fermat nije ni imao. Za $n = 2$ jednadžba $x^n + y^n = z^n$ je diofantska jednadžba čija rješenja su stranice pravokutnog trokuta (pitagorejske trojke) i još u antičko doba (čak i prije – Babilonci oko 1600. pr. Kr.) je poznato da takvi cijeli brojevi postoje (npr. $x = 3, y = 4, z = 5$). Slučajeve $n = 3$ i $n = 4$ de Fermat je

[1] Naziv binomni koeficijent navodno potječe od renesansnog matematičara Michaela Stifela, iako postoji sumnja u taj naziv jer drugi autori tvrde da je izraz koeficijent prvi koristio Viéte nešto kasnije.

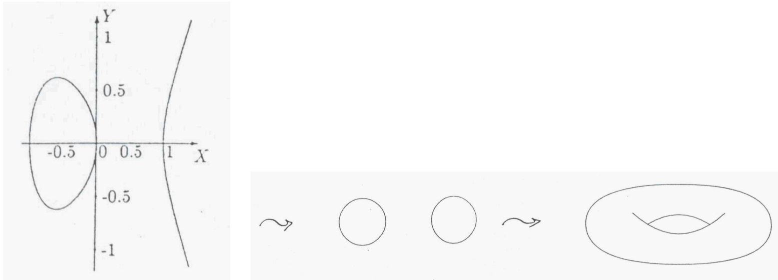
znao dokazati, no njegov dokaz za $n = 3$ je izgubljen. Najstariji sačuvani dokaz tog slučaja dao je Leonhard Euler. Slijedeći važan korak napravila je matematičarka **Sophie Germain** (1776. - 1783.), koja je svoje radove morala objavljivati pod muškim pseudonimom Monsieur Le Blanc. Godine 1825. su nezavisno jedan od drugog **Adrien-Marie Legendre** (1752. - 1833.) i **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805. - 1859.) dokazali tvrdnju za $n = 5$. **Gabriel Lamé** (1795. - 1870.) ju je dokazao za $n = 7$, a **Ernst Eduard Kummer** (1810. - 1893.) za proste brojeve n manje od 100 (osim $37, 59, 67$). Do 1849. dokazano je da veliki Fermatov teorem vrijedi za sve $n < 100$ i još mnoge druge. Većina tih dokaza temeljila se na općenitijim rezultatima koji su bitno doprinijeli razvoju teorije brojeva. Napomenimo i da je u to doba također već poznato da je uz $n = 4$ dovoljno tvrdnju provjeriti samo za proste $n \neq 2$.

Godine 1908. raspisana je nagrada Kraljevskog znanstvenog društva u Göttingenu u iznosu od 100000 Reichsmark za dokaz tog teorema, ali razvoj teorije brojeva sve je više odmicao od ovog problema jer se sve manje vidjela kako važnost tako i šansa njegova dokaza. Do početka 1980-ih godina napredak se sastojao uglavnom u profinjenju Kummerovih rezultata i kompjuterskim provjerama (npr. 1976. S. S. Wagstaff je pomoću kompjutera dobio rezultat da veliki Fermatov teorem vrijedi za sve proste brojeve $n < 125000$). Sredinom 1980-ih godina Gerhard Frey je uočio je da se ovaj problem može povezati s nekim, naizgled s njim potpuno nepovezanim, novijim rezultatima teorije brojeva, algebre i topologije, konkretno s rezultatima o eliptičkim krivuljama (to su krivulje zadane jednadžbom $y^2 = x^3+ax^2+bx+c$ s cijelim a, b, c takve da su korijeni kubnog polinoma na desnoj strani različiti) i kompleksnim modularnim krivuljama (njih možemo zamisliti kao sfere s određenim brojem ručki). Veze između tih rezultata uspostavili su G. Frey, R. Taylor i A. Wiles. Andrew Wiles je 1995. konačno dokazao i zadnji potrebni korak kojim je utvrđena istinitost Velikog Fermatovog teorema.

Za one koje zanima više: Frey, Taylor i Wiles povezali su sljedeće tri ideje:

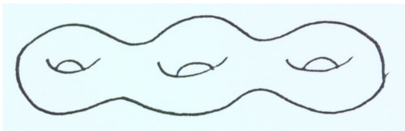
1. Prvo je uočeno da je dovoljno pokazati da za prost broj $n > 5$ ne postoje takvi $x, y, z \in \mathbb{N}$ koji su međusobno relativno prosti (i takvi da je točno jedan od njih paran), a koji zadovoljavaju jednadžbu $x^n + y^n = z^n$.

2. Zatim su se promatrali rezultati iz teorije eliptičkih krivulja definiranih nad racionalnim brojevima. Pokazalo korisnim gledati ih u projektivnoj ravnini (dakle onoj koja uključuje i beskonačno daleke točke) i u kojoj takva krivulja izgleda kao dvije kružnice, jer se krak koji ide u beskonačnost „slijepi" u takvoj jednoj beskonačnoj točki. Kako je realni svijet u biti rez kompleksnog, u kompleksnom kontekstu eliptičke krivulje su torusi.



(a) (b)

Slika 6.2: Eliptička krivulja u Cartesiusovom koordinatnom sustavu, u realnoj projektivnoj ravnini i kao torus u kompleksnoj projektivnoj ravnini.



Slika 6.3: Ploha roda $g_N = 2$.

Takve su se krivulje pokazale kao korisno sredstvo koje se prirodno pojavljuje pri rješenju nekih drugih problema u teoriji brojeva. Za eliptičku krivulju E definira se broj N_E: Uzmemo proizvoljan prost broj p i promatramo ostatke pri dijeljenju korijena polinoma x^3+ax^2+bx+c s p. Postoji samo konačno mnogo takvih p za koje bar dva korijena desnog kubnog polinoma imaju isti ostatak pri dijeljenju s p. N_E se definira kao produkt svih takvih p.

3. S dokazom velikog Fermatovog teorema povezane su i modularne krivulje i forme. Modularne krivulje si možemo predočiti kao sfere s određenim brojem g_N ručki (ili pak kao perece s g_N rupa).

Za vezu između prva dva spomenuta zapažanja zaslužan je G. Frey. On je pokazao da ako iz rješenja $x = A, y = B, z = C$ Fermatove jednadžbe (kakva su opisana pod točkom 1. gore) konstruiramo koeficijente eliptičke krivulje E ($y^2 = x^3 + (B^n - A^n)x^2 - (AB)^n x$), onda je N_E jednak dvostrukom produktu svih neparnih prostih brojeva koji dijele ABC. Za vezu između drugog i trećeg zapažanja zahvaljujemo A. Wilesu i R. Tayloru. Prve naznake veze između svijetova eliptičkih i modularnih krivulja vidjele su se još pedesetih godina, a zatim su Goro Shimura i Yutaka Taniyama postavili hipotezu koju možemo opisati ovako: modularna krivulja s g_N rupa može se neprekidno

Slika 6.4: Marin Mersenne, 17. st.

deformirati u torus (koji, kako smo vidjeli, predstavlja eliptičku krivulju). Tu su hipotezu 1995. dokazali Wiles i Taylor.

Posljedica svega je istinitost velikog Fermatovog teorema: Pokažimo da je tvrdnja navedena gore pod 1. istinita. Pretpostavimo da nije, tj. da postoje rješenja Fermatove jednadžbe s navedenim svojstvima. Pređemo na odgovarajuću eliptičku krivulju kao Frey i izračunamo njen N_E. Na osnovu rezultata Wilesa i Taylora, pređemo na odgovarajuću modularnu krivulju. Sad se pozovemo na rezultate K. Ribeta s kraja 1980-ih godina i dobivamo da je odgovarajući $g_N = 0$ tj. da je naša eliptička krivulja rezultat neprekidne deformacije sfere. No, to nije moguće jer se sfera (koja nema rupa) ne može neprekidno deformirati u torus. Slijedi da je naša pretpostavka bila kriva tj. da je prva tvrdnja istinita.

Već smo spomenuli da je de Fermat kao i mnogi drugi matematičari (Pascal, Desargues, Roberval, ...) tog doba komunicirao s redovnikom **Marinom Mersenneom** (1588. - 1648.), koji se bavio savršenim[2] i prostim brojevima. Mersenneov značaj za matematiku je prije svega u njegovoj korsepondenciji sa svim važnim matematičarima tog doba, čime je omogućena razmjena ideja u doba u koje još nistu postojali matematički znanstveni časopisi niti brzi načini komunikacije. Branio je Descartesa i Galilea od teoloških prigovora i trudio se eksponirati alkemiju i astrologiju kao pseudoznanosti. Bavio se i nekim fizikalnim problemima. Primjerice, predložio je Huygensu korištenje njihala za mjerenje vremena, čime je inspirirao njegovo otkriće prvog sata s njihalom. Nastavio je i neka Galileova istraživanja, čak je inspirirao neka od Galileovih kasnijih otkrića, a kroz njegove prijevode i obrade Galileova djela postala su poznata izvan Italije. Nakon njegove smrti pronađena je njegova pismena korespondencija sa 78 različitih osoba, uključivši de Fermata, Huygensa, Pella i Torricellija.

Prosti brojevi oblika $M_n = 2^n - 1$ zovu se **Mersenneovi brojevi**. Za

[2]Prirodan broj je savršen ako je jednak zbroju svih svojih pravih djeljitelja.

M_n se lako pokaže da je za složen n složen. Za prost n ne moramo dobiti prost broj: $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$ (uočeno 1536. godine). Prva četiri Mersenneova prosta broja ($M_2 = 3$, $M_3 = 7$, $M_5 = 31$ i $M_7 = 127$) su bili poznati još od antičkih vremena. Peti, $M_{13} = 8191$, je otkriven u 15. stoljeću, ali nije poznato tko ga je otkrio. Prose brojeve M_{17} i M_{19} otkrio je 1588. Cataldi[3]. Sljedećeg (M_{31}) otkrio je Euler 1772. Zatim je opet prošlo stotinjak godina dok nije otkriven sljedeći (M_{127}, s 39 znamenki, a otkrio ga je 1876. Lucas[4] Kako su se rijetko nalazili, Mersenneovi su brojevi dugo bili izvor velikih prostih brojeva. Do doba računala nije otkriven veći prost broj od M_{127} (iako je nađeno još nekoliko manjih). Godine 1952. je za M_{521}, M_{607}, M_{1279}, M_{2203} i M_{2281} pokazano da su prosti. Do danas (2009.) je nađeno 48 prostih Mersenneovih brojeva (najveći među njima $M_{43112609}$ ima 12978189 znamenki).

Leonhard Euler je prvi uočio da se teorija brojeva može proučavati pomoću metoda matematičke analize i time je postao osnivač analitičke teorije brojeva. Uspio je pokazati ne samo divergenciju harmonijskog reda, nego i reda $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \dots$ (zbroj recipročnih vrijednosti prostih brojeva). Proširio je Fermatov mali teorem i uveo Eulerovu φ-funkciju: Za prirodan broj n označimo s $\varphi(n)$ broj brojeva iz skupa $\{1, \dots, n\}$ koji su relativno prosti s n. Eulerovo poopćenje malog Fermatovog teorema poznato je kao **Eulerov teorem**: Za broj a relativno prost s n je $a^{\varphi(n)} - 1$ djeljivo s n.

Euler je našao 60 parova prijateljskih[5] brojeva. Provjerio je niz de Fermatovih hipoteza, među ostalim (kako je već spomenuto) je dokazao veliki Fermatov teorem za $n = 3$. Našao je i opće rješenje diofantske jednadžbe drugog stupnja. Pokazao je da su parni savršeni brojevi isključivo oblika $2^{n-1}(2^n - 1)$ ako je $2^n - 1$ prost i da je kriva de Fermatova hipoteza da su svi brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ prosti. Izrekao je (1783.), ali nije znao dokazati, **zakon kvadratnog reciprociteta**, jedan od najpoznatijih problema teorije

[3]Pietro Antonio Cataldi, 1548. - 1626., talijanski matematičar, bavio se verižnim razlomcima i pokušavao dokazati peti Euklidov postulat.

[4]Édouard Lucas, 1842. - 1891., francuski matematičar, bavio se Fibonaccijevim nizom kojem je i dao ime, a srodan niz po njemu je nazvan Lucasovim nizom. Razvio je i više metoda provjere je li neki prirodan broj prost. Umro je na vrlo neobičan način: na jednom banketu konobaru je ispao komad posuđa te je komad puknutog tanjura porezao Lucasa na obrazu; umro je par dana kasnije od upale kože.

[5]Par prirodnih brojeva je prijateljski ako je svaki od ta dva broja jednak zbroju svih pravih djeljitelja drugog broja.

brojeva tog doba. Označimo[6] (za prost p i prirodan broj a)

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \exists r \in \mathbf{N}, a \equiv r^2 (\operatorname{mod} p) \\ -1 & \text{ako takav } r \text{ ne postoji} \\ 0 & p|a \end{cases}$$

Gornja oznaka zove se Legendreov simbol. Euler je dokazao da ako p ne dijeli a vrijedi:

$$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} (\operatorname{mod} p).$$

Ta tvrdnja olakšava izračunavanje $\left(\frac{a}{p}\right)$, a slijedi iz malog Fermatova teorema: Ako p ne dijeli a, onda $a^{p-1} - 1 = (a^{\frac{p-1}{2}} - 1)(a^{\frac{p-1}{2}} + 1)$ po malom Fermatovom teoremu mora biti djeljivo s p. Dakle p dijeli $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ ili $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ (i, budući p ne dijeli razliku $(a^{\frac{p-1}{2}} + 1) - (a^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 2$, sigurno p ne dijeli oba broja). Pokazuje se da p dijeli $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ točno kad $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, odnosno p dijeli $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ točno kad $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$.

Zakon kvadratnog reciprocitita zapisan pomoću Legendreova simbola tvrdi da za različite neparne proste brojeve p, q vrijedi

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

Drugim riječima: $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$ osim ako i p i q pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3, a u tom slučaju je $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$. Zakon kvadratnog reciproiciteta kao i druge tvrdnje vezane za kongruenciju u kojoj je neki prirodan broj kongruentan kvadratu nekog broja modulo nekog prostog broja su vrlo bitne u proučavanju diofantskih jednadžbi i proučavanju prostih brojeva.

U poglavlju o otkriću neeuklidskih geometrija spomenuli smo Legendrea. **Adrien-Marie Legendre** (1752. - 1833.) je bio iz bogate obitelji i odlično obrazovan u matematici i fizici. Imao je uspješnu matematičku karijeru. Bavio se primjenama matematike u fizici i astronomiji, eliptičkim funkcijama, ali i teorijom brojeva. U doba revolucije bio je član komisije za standardizaciju mjera koja je uvodila metrički i decimalni sustav (1791.), ali je zbog ukidanja Akademije znanosti, čiji je bio član, izgubio dobar prihod. U to je doba radio na svom najpoznatijem djelu *Eléments de géométrie*, objavljenom 1794. Godine 1795. je Akademija ponovno otvorena kao Nacionalni institut

[6] Oznaka $a \equiv b (\operatorname{mod} n)$ znači da je $a - b$ djeljivo s n. Kaže se da je a kongruentno b modulo n.

Slika 6.5: Johann Karl Friedrich Gauss, 18./19. st.

znanosti i umjetnosti i Legendre postaje član odjela za matematiku. Kad je 1803. Napoleon reorganizirao Institut, stvorena je geometrijska sekcija i Legendre je postao njen član. U slijedećem razdoblju doživio je par kritika od mladog Gaussa koje su ga jako pogodile. U svom prvom izdanju *Théorie des Nombres* (1785.) izrekao je i ne baš točno dokazao (zapravo, dokazao je sao neke specijalne slučajeve) zakon kvadratnog reciprociteta. Poboljšan, ali i dalje nesavršen dokaz dao je 1798. Točno ga je dokazao Gauss 1801., koji je pritom kritizirao Legendreove dokaze i istakao svoj prioritet. Legendre je kasnije rekao: *Ovakva drskost je neshvatljiva za čovjeka koji ima dovoljno osobnih zasluga da nema potrebe da prisvaja tuđa otkrića.* U svom slijedećem izdanju *Théorie des Nombres* Legendre 1808. koristi taj dokaz i citira Gaussa. U istom djelu procjenjuje $\pi(n)$ (broj prostih brojeva koji nisu veći od n) s $\frac{n}{\log n - 1{,}08366}$. I za to će Gauss, kao i za zakon kvadratnog reciprociteta i (kako je spomenuto u poglavlju o počecima statistike) metodu najmanjih kvadrata, tvrditi da ga je on prvi dokazao, ali Legendreu svakako pripada zasluga da je prvi privukao pozornost na to. Godine 1824. Legendre je odbio glasovati za vladinog kandidata za Institut i zbog toga mu je ukinuta penzija te je umro u siromaštvu.

Johann Karl Friedrich Gauss (1777. - 1855.) zasigurno je jedan od najvećih matematičara svih vremena, a mnogi ga smatraju i najvećim. Doprinijeo je gotovo svim područjima matematike. Kao i Legendre bavio se gustoćom prostih brojeva tj. procjenom broja $\pi(n)$, čak je rekao prijatelju da bi kad god bi imao petnaest minuta vremena to vrijeme potrošio brojeći proste brojeve u rasponu od 1000 brojeva. Procjenjuje se da je do kraja života pobrojao sve proste brojeve do 3000000. Njegova procjena za $\pi(n)$ je dana u terminima logaritamskog integrala

$$\pi(n) = \int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{\log t}$$

Gaussova *Disquisitiones Arithmeticae* iz 1801. predstavlja početak moderne

Slika 6.6: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 19. st.

teorije brojeva. Tu je dan prvi dokaz **osnovnog teorema aritmetike** (svaki cijeli broj se može na *jedinstven* način, do na poredak, faktorizirati na proste brojeve), zatim niz „manjih" rezultata (npr. svaki prirodni broj je zbroj tri trokutna broja) te prvi potpuni dokaz zakona kvadratnog reciprociteta. Kao zanimljivost spomenimo da u *Disquisitiones Arithmeticae* Gauss prvi put spominje naziv „apsolutna vrijednost" (*magnitudo absoluta*).

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805. - 1859.), njemački matematičar belgijskog porijekla, s 12 godina se zaljubio u matematiku i sav je džeparac trošio na kupnju matematičkih knjiga. Studirao je u Parizu jer tadašnja njemačka sveučilišta nisu bila dovoljne razine i upravo on će kasnije doprinijeti pretvaranju njemačkih u najbolja svjetska. U Parizu je ostvario kontakt s mnogim odličnim matematičarima (Biot, Fourier, Laplace, Legendre, Poisson, ...) Prvi članak, kojim je odmah postao poznat, bio je dokaz velikog Fermatovog teorema za slučaj $n = 5$. Ako je $x^5 + y^5 = z^5$ onda jedan od x, y, z mora biti paran i jedan mora biti djeljiv s 5. Nastupaju dva slučaja: ako je to jedan te isti broj i ako su to dva različita. Dirichlet je dokazao prvi slučaj (1825.). Legendre je bio jedan od recenzenata i on je dokazao drugi slučaj iste godine. Kasnije je Dirichlet dokazao i slučaj $n = 14$. Godine 1825. se Dirichlet vraća u Njemačku i u razdoblju 1828. - 1855. je bio profesor na berlinskom sveučilištu, a 1831. postaje član berlinske akademije znanosti. Sad mu se financijsko stanje dovoljno poboljšalo da se mogao oženiti te se oženio Rebeccom Mendelssohn (jednom od dvije sestre skladatelja Mendelssohna). Bio je prijatelj Jacobija i kad se Jacobi uslijed siromašnih prilika razbolio i bio prisiljen ići u Italiju (1843.) uspio je za njega ishoditi financijsku pomoć. Dirichlet je otišao u Italiju s Jacobijem i vratio se u Berlin 1845. Nakon Gaussove smrti Dirichletu je ponuđeno mjesto u Göttingenu. Tu je ponudu pokušao iskoristiti da mu se u Berlinu smanje obaveze (naime, istovremeno uz posao na sveučilišu sve je ovo vrijeme držao i predavanja na vojnoj školi) i kad je to odbijeno prihvaća mjesto u Göttingenu. Tu je imao više vremena za istraživanja, ali je nažalost za vrijeme posjeta Montreuxu prilikom jedne konferencije doživio srčani udar. Teško bolestan vratio se u Göttingen i dok je bio bolestan žena mu umire od kapi te je ubrzo zatim i on umro. Dirichletovi doprinosti matematici su izvanredni. Dokazao je (1837.) da u aritmetičkom nizu u kom su prvi član i diferencija međusobno relativno prosti ima beskonačno mnogo prostih brojeva (hipotezu je postavio Gauss). Napisao je više članaka iz područja analitičke teorije brojeva, u kojima uvodi Dirichletov red $\sum_n a_n n^{-s}$. Bavio se i algebarskom teorijom brojeva. Godine 1837. predložio je modernu definiciju funkcije: *Ako je varijabla y tako povezana s varijablom x da kad god je x-u pridružena numerička vrijednost, postoji pravilo koji se određuje jedinstvena vrijednost y, onda za y kažemo da je funkcija nezavisne varijable x.* Bavio se i mehanikom i teorijom potencijala te parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i uvjetima konvergencije Fourierovih redova. Njegovi su učenici među drugima Kronecker i Riemann. Opisan je ovako: *On je dosta visok, štrkljast čovjek s brkovima i bradom koji postaju sijedi i pomalo grubim glasom te dosta nagluh. Bio je neopran, sa šalicom kave i cigarom. Jedna od mana mu je zaboravljanje vremena, vadio je svoj sat, vidio da je prošlo tri, i onda istrčao bez da završi rečenicu.*

Dvije najpoznatije do danas nedokazane hipoteze u teoriji brojeva su hipoteza o parovima blizanaca (postoji beskonačno mnogo parova prostih brojeva međusobno udaljenih za 2) i Goldbachova hipoteza (svaki prirodan broj veći od 2 može se zapisati kao suma dva prosta broja).

Poglavlje 7

Nastanak teorije skupova

Za modernu matematiku temeljna disciplina teorije skupova nastala je krajem devetnaestog stoljeća. To je jedina matematička disciplina za koju možemo reći da ima jednog „tvorca": to je njemački matematičar Georg Cantor (u suradnji s Richardom Dedekindom). Teorija skupova se bavi matematičkim objektima koje zovemo skupovima, pri čemu je karakteristično da se prije svega proučavaju beskonačni skupovi. Stoga se smatra da je teorija skupova nastala Cantorovim otkrićem da postoje beskonačnosti različite „veličine".

Bilo je mnogo prethodnika formaliziranju ideje o beskonačnosti. Tu (uz mnoge filozofe koje je ideja beskonačnosti oduvijek zanimala) svakako treba spomenuti Zenona iz Eleje sa svojim paradoksima (5. st. pr. Kr.), zatim Alberta Saksonskog[1] koji u srednjem vijeku argumentira da zraka beskonačne dužine ima isti volumen kao prostor, te **Bernharda Bolzana** (1781. - 1848.) koji se bavio konceptom beskonačnog skupa u doba kad mnogi smatraju da takvi skupovi ne postoje. Bolzano je na primjerima pokazao ono što je kasnije uzeto kao definicija beskonačnog skupa: za razliku od konačnih, kod beskonačnih skupova postoji bijekcija[2] sa skupa na njegov pravi podskup.

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845. - 1918.) rođen je u St. Petersburgu u Rusiji. Otac mu je bio Nijemac i trgovac, a majka Ruskinja. Odgojen je u protestantskoj vjeri svoga oca, a od majke katolkinje naslijedio je talent za glazbu te je bio uspješan violinist. Zbog slabog očeva zdravlja obitelj se preselila u Njemačku, u Frankfurt, kad je Georgu bilo 11 godina. Studirao je matematiku, prvo u Zürichu, a nakon očeve smrti studij je nastavio u Berlinu. Za vrijeme studija u Berlinu pohađao je preda-

[1]Albert Saksonski, 1316. - 1390., njemački matematičar koji je bio važan posrednik u prenošenju matematičkih ideja.

[2]Bijekcija je funkcija sa svojstvom da svaki element kodomene ima jedinstven original u domeni.

Slika 7.1: Georg Cantor, 19./20. st.

vanja tada najuglednijih matematičara poput Karla Weierstrassa i Leopolda Kroneckera. Cantor je doktorirao iz područja teorije brojeva. Nakon što se 1869. zaposlio na na sveučilištu u gradu Halle, pod utjecajem starijeg kolege Heinea[3] počeo se baviti pitanjima konvergencije trigonometrijskih redova. Pokušaji dokaza konvergencije trigonometrijskog reda uz razne uvjete oblika „osim u konačno mnogo točaka", „osim u diskretno raspoređenim točkama", „osim na skupovima točaka bez gomilišta" doveli su Cantora na ideju potrebe preciziranja pojma linearnog kontinuuma realnih brojeva. Godine 1872. u Švicarskoj upoznao je i sprijateljio se s **Richardom Dedekindom** (1831. - 1916.) koji se također bavio pitanjem precizne definicije skupa realnih brojeva. Dedekindov apstraktno-logički način mišljenja bitno je utjecao na sređivanje Cantorovih ideja. Dok je Cantor pokušao definirati iracionalne brojeve kao limese nizova racionalnih brojeva, Dedekind je iracionalne brojeve definirao kao Dedekindove rezove u skupu racionalnih brojeva: Dedekindov rez skupa racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je njegov rastav na dva disjunktna skupa A i B (dakle, $A \cap B = \emptyset$ i $A \cup B = \mathbb{Q}$) pri čemu su svi elementi od A manji od svih elemenata od B i A nema najveći element. Ideja je da Dedekindov rez predstavlja „rupu" u skupu $\mathbb{Q}$ koja je iracionalan broj. Primjerice, uzmemo li $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ i $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$ (skupovi racionalnih brojeva čiji kvadrati su manji odnosno veći od 2), onda su A i B očito disjunktni, a kako nijedan racionalan broj kvadriran ne daje 2, unija im je cijeli skup $\mathbb{Q}$. Skup A nema najveći element (koji god racionalan broj je kvadriran manji od 2, postoji od njega veći s istim svojstvom). Dakle, par (A, B) je Dedekindov rez. Taj rez predstavlja iracionalan broj $\sqrt{2}$.

U toku 1873. Cantor je dokazao da skup prirodnih brojeva ima jednako mnogo elemenata kao i skupovi cijelih i racionalnih brojeva. Pritom za dva

[3]Heinrich Edouard Heine, 1821. 1881., njemački matematičar, uveo je koncept uniformne neprekidnost funkcija. Po njemu ime nosi i Heineova definicija neprekidnosti: realna funkcija realne varijable f je neprekidna u točki c svoje domene ako za svaki niz (x_n) koji konvergira ka c i čiji članovi su u domeni od f vrijedi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c)$.

skupa uzima da imaju jednako mnogo elemenata ako se može uspostaviti bijekcija među njima (formalno je to definirao tek nekoliko godina kasnije). Primijetimo da je to istina za konačne skupove (kod kojih intuitivno razumijemo kad imaju ili nemaju jednako mnogo elemenata). Primjerice, za skup $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ kažemo da ima 4 elementa jer možemo reći da je $\diamondsuit$ prvi, $\heartsuit$ drugi, $\spadesuit$ treći i $\clubsuit$ četvrti. Drugim riječima, imamo bijekciju s $\{1, 2, 3, 4\}$ na $\{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Općenito, konačan skup A ima n elemenata ako možemo naći bijekciju s $\{1, 2, \ldots, n\}$ na A. Korisno je primijetiti da je neki skup ekvipotentan (jednakobrojan) sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ točno ako se njegove elemente može poredati u niz[4]. Skupove koji su ekvipotentni s $\mathbb{N}$ zovemo **prebrojivima** i kažemo da imaju kardinalni broj $\aleph_0$ (alef-nula). Naziv prebrojivost i oznaka $\aleph_0$ potječu od Cantora, ali iz kasnijeg razdoblja njegova rada.

Skup $\mathbb{Z}$ ima jednako mnogo elemenata kao i $\mathbb{N}$ jer njegove elemente možemo nabrojati kao

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots$$

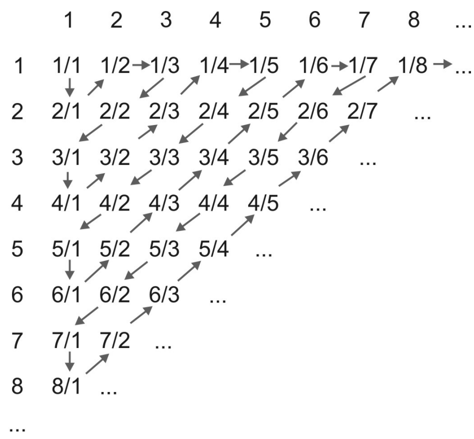
što je ekvivalentno definiranju bijekcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}$, $f(n) = (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]$, gdje je uglatim zagradama označena funkcija najveće cijelo koja realnom broju pridružuje najveći cijeli broj manji od njega.

Prebrojivost skupa $\mathbb{Q}$ slijedi iz ekvipotentnosti skupa $\mathbb{N}$ i skupa pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+$, a ona se pokazuje tako da pozitivne racionalne brojeve poredamo u niz pomoću dijagrama na slici 7.2. Pritom se duplikati ignoriraju.

Cantor je dalje pokazao da skup svih algebarskih brojeva[5] također prebrojiv. Ideja Cantorova dokaza je kako slijedi: svakoj algebarskoj jednadžbi $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ pridružuje njezin indeks, a to je zbroj apsolutnih vrijednosti njenih koeficijenata i njenog stupnja ($|a_n| + |a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n$). Zatim niže algebarske brojeve redoslijedom indeksâ odgovarajućih jednadžbi. Najmanji mogući indeks je 2 i jedina jednadžba indeksa 2 je $x = 0$. Njeno rješenje 0 je prvi algebarski broj. Zatim postoje 4 algebarske jednadžbe indeksa 3: $2x = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$ i $x^2 = 0$. Njihova rješenja su $0, 1, -1$. Kako 0 već imamo, dobili smo dva nova algebarska broja. Sad Cantor dalje induktivno nastavlja: za svaki indeks n postoji konačno mnogo algebarskih jednadžbi koje pak imaju po konačno mnogo rješenja te se u

[4] Niz je funkcija s domenom $\mathbb{N}$ ili $\mathbb{N}_0$ koja prirodnim brojevima (pozicijama) pridružuje elemente nekog skupa (članove niza).

[5] Algebarski brojevi su oni realni brojevi koji se mogu dobiti kao rješenja algebarskih jednadžbi. Algebarske jednadžbe su jednadžbe oblika $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ s $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \ldots, n$.



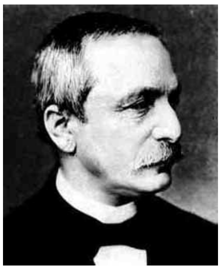
Slika 7.2: Prebrojivost skupa pozitivnih racionalnih brojeva.

svakom koraku doda konačno mnogo algebarskih brojeva. Na taj način su algebarski brojevi poredani u niz tj. uspostavljena je bijekcija s $\mathbb{N}$.

Sad se postavilo pitanje: ima li i realnih brojeva jednako mnogo kao prirodnih? Cantorov dokaz da je odgovor „ne" smatra se nastankom teorije skupova – njime je po prvi put dokazano da postoje dva beskonačna skupa koji nemaju jednako mnogo elemenata. Cantor je dokaz da se realni brojevi ne mogu poredati u niz te ih stoga ima više nego prirodnih objavio 1874. u časopisu *Crelle's Journal*. Objavljivanju se protivio **Leopold Kronecker** (1823. - 1891.), jedan od urednika časopisa, te je članak objavljen tek nakon intervencija Weierstrassa i Dedekinda. Razlog Kroneckerovog protivljenja bio je filozofske prirode: Kronecker je pripadao struji konstruktivista, matematičara koji priznaju samo onaj dokaz postojanja nekog matematičkog objekta koji daje način konstrukcije tog objekta. Cantorovi dokazi su pak bitno nekonstruktivistički. Zanimljivost ovog Cantorovog članka je i da je kao jednostavnu posljedicu neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ dobio da postoji beskonačno mnogo transcendentnih[6] brojeva. To je bilo osobito senzacionalno uzevši u obzir da je tek 1851. Joseph Liouville dokazao da takvi brojevi postoje. Liouville je neuspješno pokušavao dokazati transcendentnost broja e, a 1844. je pomoću verišnih razlomaka konstruirao beskonačno mnogo transcendentnih brojeva. Jedan od njih danas se zove Liouvilleov broj – to je broj $0,110001000000000000000001000\ldots$ koji ima jedinice na pozicijama $n!$ iza decimalnog zareza, a ostale znamenke su nule.

Spomenuti prvi Cantorov dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ koristi **Cantorov aksiom** da padajući niz segmenata realnih brojeva $[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq$

[6]Realan broj je transcendentan ako nije algebarski.



Slika 7.3: Leopold Kronecker, 19. st.

$[a_2, b_2] \supseteq \ldots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \ldots$ ima neprazan presjek. Danas uobičajen dokaz je jednostavniji, ali također Cantorov (iz 1891.). Iste godine kad je objavio dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$, dakle 1874., Cantor se oženio sestrinom prijateljicom. Nakon dokaza neprebrojivosti skupa realnih brojeva, Cantor je pokušao dokazati nešto što mu se činilo očigledno: da dužina i kvadrat nisu jednakobrojni. No, 1877. dokazao je upravo suprotno: ne samo da dužina i kvadrat imaju jednako mnogo točaka, nego i kocka ima isto toliko. Općenito: svi skupovi $\mathbb{R}^n$ su jednakobrojni. Tom je prilikom Cantor rekao: *Vidim, ali ne vjerujem!*. Posljedično se postavilo pitanje smislenosti pojma dimenzije, koje je razriješeno kad je dokazano da doduše svi skupovi $\mathbb{R}^n$ (pravac, ravnina, uobičajeni trodimenzionalni prostor, ...) imaju jednako mnogo elemenata tj. postoje bijekcije između svaka dva takva prostora, ali za različite n (dimenzije prostora) ne postoje *neprekidne* bijekcije. Gornji je rezultat Cantor također objavio, ponovno uz velik Kroneckerov otpor, u časopisu *Crelle's Journal*, no nakon toga više nije objavljivao u tom časopisu. U tom članku u Cantor uvodi ekvipotentnost skupova (zove ju ekvivalencijom odnosno kaže da dva skupa imaju istu moć ako postoji bijekcija među njima). Pokazuje da od svih beskonačnih skupova najmanju moć imaju prirodni brojevi. Umjesto Cantorovog pojma moći skupa danas se koristi termin kardinalni broj: dva skupa imaju jednak kardinalni broj ako su ekvipotentni. Skup A ima kardinalni broj koji nije veći od kardinalnog broja skupa B(pišemo: $k(A) \leq k(B)$) ako postoji funkcija $f : A \to B$ koja je injekcija (različitim elementima pridružuje različite slike).

Seriju od šest članaka u kojima detaljno izlaže teoriju skupova Cantor je objavio u razdoblju 1879. - 1884. u časopisu *Mathematische Annalen* usprkos sve većoj opoziciji njegovim idejama. Opoziciju predvodi Kronecker, u to doba iznimno utjecajna ličnost u svijetu matematike. U tim se člancima analiziraju dobro uređeni skupovi[7] i uvode ordinalni brojevi i operacije s

[7]Dobro uređeni skupovi su skupovi u kojima su svaka dva elementa usporediva i svaki

njima. Pritom za dva dobro uređena skupa kažemo da imaju isti ordinalni broj ako postoji bijekcija f između tih skupova koja čuva uređaj (ako je $x < y$ u domeni, onda je $f(x) < f(y)$ u kodomeni). Ordinalni brojevi konačnih skupova su točno prirodni brojevi (to je zapravo prava definicija prirodnih brojeva), a ordinalni broj skupa $\mathbb{N}$ označava se s ω. Tim člancima je uvedena aritmetika transfinitnih brojeva. Za razliku od Kroneckerovog pristupa, koji prigodom Lindemannovog dokaza da je π transcendentan kaže da to istraživanje nije korisno jer iracionalni brojevi ne postoje, Cantorovo shvaćanje matematike je da se u nju mogu uvesti bilo koji koncepti uz jedine uvjete da ne sadrže kontradikcije i da su definirani koristeći ranije prihvaćene koncepte. Poznata je Cantorova izjava:

Bît matematike je u njenoj slobodi.
(Das Wesen der Mathematik liegt in ihrer Freiheit.)

Najznamenitiji Cantorov teorem je tzv. **osnovni Cantorov teorem teorije skupova**: Svaki skup S ima strogo manje elemenata nego njegov partitivni skup[8]. Kako se može pokazati da je $k(\mathcal{P}(S)) = 2^{k(s)}$, Cantorov osnovni teorem kratko možemo iskazati formulom

$$k(S) < 2^{k(S)}.$$

Taj je teorem dokazao **dijagonalnim argumentom**. Napomenimo da je lako dokazati da skup ne može imati više elemenata nego njegov partitivni skup tj. da vrijedi $k(S) \leq k(\mathcal{P}(S))$. Naime, definiramo li funkciju $f : S \to \mathcal{P}(S)$ s $f(x) = \{x\}$, ona je očigledno injekcija (ako $x \neq y$, onda su i skupovi $\{x\}$ i $\{y\}$ različiti). Da bismo dokazali osnovni Cantorov teorem treba pokazati da nema surjekcije[9] $f : S \to \mathcal{P}(S)$ (što je ekvivalentno nepostojanju injekcije s $\mathcal{P}(S)$ u S). Kad bi postojala takva surjekcija f, znači da za skup $T = \{s \in S : s \notin f(s)\} \subseteq S$ (tj. $T \in \mathcal{P}(S)$) postoji element $x \in S$ takav da je $f(x) = T$. Imamo dvije mogućnosti: $x \in T$ i $x \notin T$. Ako $x \in T$, po definiciji skupa T slijedi $x \notin f(x) = T$, dakle kontradikcija. Ako pak $x \notin T = f(x)$ opet po definiciji skupa T slijedi da je $x \in T$ tj. i u ovom slučaju imamo kontradikciju. Zaključujemo da ne postoji surjekcija sa S na $\mathcal{P}(S)$ tj. osnovni teorem teorije skupova je dokazan.

Cantorov dijagonalni argument ilustrirat ćemo i dokazom neprebrojivosti[10] skupa realnih brojeva jer je u tom dokazu očiglednije otkud naziv toj tehnici

podskup ima minimalni element, primjerice skup prirodnih brojeva uz uobičajeni uređaj je dobro uređen, a skup realnih brojeva nije.

[8]Partitivni skup od S je skup $\mathcal{P}(S)$ svih podskupova od S.

[9]Surjekcije je funkcija za koju vrijedi da svaki element kodomene ima original u domeni: $f : X \to Y$ je surjekcija ako za svaki $y \in Y$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = y$.

[10]Beskonačni skupovi koji nisu prebrojivi zovu se neprebrojivi.

```
x1=0,2340134...
x2=0,4325136...
x3=0,0294185...
x4=0,7835301...
...

y=0,9989...
```

Slika 7.4: Cantorov dijagonalni argument (neprebrojivost skupa $\mathbb{R}$).

dokaza. Prvo primijetimo da je $\mathbb{R}$ ekvipotentan bilo kojem otvorenom intervalu, primjerice $\langle 0,1\rangle$ (odgovarajuća bijekcija je recimo $f:\langle 0,1\rangle\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$.). Dakle, dovoljno je dokazati neprebrojivost intervala $\langle 0,1\rangle$. Pretpostavimo suprotno: taj interval je prebrojiv tj. svi brojevi iz $\langle 0,1\rangle$ se mogu poredati u niz $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Tada se svaki od brojeva x_i može zapisati[11] u obliku $0, a^i_1 a^i_2 a^i_3 \ldots$ (dakle, a^i_j je j-ta znamenka iza decimalnog zareza u i-tom broju). Sad gledamo sve „dijagonalne znamenke" (tj. a^i_i: i-ta znamenka i-tog broja - prva od prvog, druga od drugog itd.) i pogledamo broj $y=0, y_1y_2y_3\ldots$ kojem je i-ta znamenka $y_i=9$ ako $a^i_i\neq 9$, a inače $y_i=8$. Tada se $y\in\langle 0,1\rangle$ razlikuje od svakog x_i (bar u i-toj po redu znamenki), pa smo suprotno pretpostavci našli broj iz $\langle 0,1\rangle$ koji nije među nabrojanima. Stoga je taj interval i time i skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv.

Jednostavna posljedica osnovnog Cantorovog teorema teorije skupova je da postoji beskonačno mnogo beskonačnih kardinalnih brojeva: za kardinalni broj nekog skupa A, od njega je veći kardinalni broj od $B=\mathcal{P}(A)$, od tog je pak veći kardinalni broj od $C=\mathcal{P}(B)$ itd. Ukratko: postoji beskonačno mnogo različitih beskonačnosti!

Ipak, posebno su istaknuta dva beskonačna kardinalna broja: $\aleph_0$ koji označava koliko elemenata ima bilo koji prebrojiv skup te c koji označava koliko elemenata ima skup realnih brojeva. Očigledno (jer $\mathbb{N}\subseteq\mathbb{R}$) je $\aleph_0\le c$, a kako $\mathbb{R}$ nije prebrojiv vrijedi

$$\aleph_0 < c.$$

Razumno je stoga pitanje, o kojem je razmišljao i Cantor, postoji li koji kardinalni broj između ta dva? Drugim riječima, postoji li skup koji ima više elemenata nego skup $\mathbb{N}$ i manje nego $\mathbb{R}$? Cantor je smatrao da ne postoji i tako postavio **hipotezu kontinuuma** $\aleph_1=c$, gdje je s $\aleph_1$ označen najmanji kardinalni broj veći od $\aleph_0$. Drugi oblik iste tvrdnje je

$$2^{\aleph_0}=\aleph_1.$$

[11] Taj zapis nije jedinstven i upravo zbog ove nepreciznosti opisani dokaz je pojednostavljena verzija potpunog dokaza.

Taj je oblik ekvivalentan jer se može dokazati da je $\mathbb{R}$ (kardinalnog broja c) ekvipotentan skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (kardinalnog broja $2^{\aleph_0}$). Cantor je bezuspješno pokušavao dokazati hipotezu kontinuuma. Nakon višestrukih neuspjeha u dokazivanju i nakon što je bezuspješno pokušao dobiti mjesto u Berlinu, čemu su se protivili Schwarz i Kronecker, godine 1884. Cantor je doživio prvi napad depresije. Od te prve krize oporavio se unutar jedne godine, no prema mišljenju mnogih više nikad nije postigao tako vrijedne rezultate kao prije 1884. U razdoblju od 1885. do kraja stoljeća Cantor je proširio svoju teoriju kardinalnih i ordinalnih brojeva te je 1895. i 1897. konačno u dva dijela izdao potpun pregled teorije skupova. U tom djelu dao je dokaz poznatog Cantor-Bernsteinovog teorema koji kaže da je ekvipotentnost skupova antisimetrična tj. ako je A ekvipotentan nekom podskupu od B i B ekvipotentan nekom podskupu od A, onda su A i B ekvipotentni. Teorem nosi ime po Cantoru i Felixu Bernsteinu , koji ga je dokazao nezavisno od Cantora.

Napomenimo ovdje da je najpoznatiji simbol iz teorije skupova, znak $\in$ za „je element skupa" te znakove $\cap$ i $\cup$ za presjek i uniju skupova uveo **Giuseppe Peano** 1888. Peano je ujedno prvi koji je eksplicitno spomenuo korištenje tvrdnje poznate kao **aksiom izbora**, koju je implicitno već ranije koristio Cantor. Radi se o tvrdnji da za bilo kakvu familiju[12] međusobno disjunktnih skupova postoji skup koji sa svakim skupom te familije ima točno jedan zajednički element. Danas je Peano najpoznatiji po aksiomima skupa prirodnih brojeva koje je objavio u pamfletu *Arithmetices principia, nova methodo exposita* 1889.

Tokom 1890-ih se Cantor pokušao pomiriti s Kroneckerom te ga je pozvao na prvi sastanak *Deutsche Mathematische Vereinigung* (Njemačkog matematičkog društva) 1891. Kronecker nije mogao doći na taj sastanak zbog smrti supruge, a ubrzo zatim je i sam umro. Iako se često kaže da je Kroneckerov otpor njegovim idejama uzrok Cantorovih depresija, prema suvremenim saznanjima o bolesti depresije to je ipak vjerojatno bio samo povod izbijanja bolesti. Godine 1896. Cantoru je umrla majka, a 1899. mlađi brat i najmlađi sin. S vremenom su se napadi depresije sve češće pojavljivali i počeo se sve ekscentričnije ponašati. Tako je u svojim „mračnim" fazama bio skloniji baviti se filozofijom i teorijom da je Roger Bacon napisao Shakespeareove drame, nego matematikom. Objavio je i radove o toj teoriji, a kad je 1911. kao ugledan znanstvenik bio pozvan na petstotu obljetnicu sveučilišta St. Andrews u Škotskoj govorio je uglavnom o Shakespeare-Bacon teoriji. Nakon što je u razdoblju 1900. - 1910. često zbog boravaka u sanatorijima bio odsutan s posla, povukao se u mirovinu 1913. Posljednje godine života proveo je

[12]Uobičajen termin kad se govori o skupu čiji elementi su skupovi je da je to familija skupova.

slabo ishranjen zbog ratnih uvjeta, a umro je od srčanog udaru u sanatoriju u Halleu, 6. siječnja 1918.

Krajem devetnaestog stoljeća je tako temeljem Cantorovih rezultata teorija skupova bila više-manje kompletna matematička teorija, ili se bar tako činilo. Naime, 1897. objavljen je prvi paradoks teorije skupova. To je znameniti **paradoks Burali-Fortija**. Iako je u originalnoj verziji **Cesare Burali-Forti** (1861. - 1931.), otkrivač paradoksa, krivo shvatio definiciju dobro uređenog skupa, nakon dorada taj paradoks je poprimio suvremenu formu: kad bi postojao skup svih ordinalnih brojeva, onda bi i taj skup imao ordinalni broj koji bi morao biti istovremeno u njemu (jer je ordinalan) i izvan njega (jer je veći od svih ordinalnih brojeva). Posljedično ne postoji skup svih ordinalnih brojeva. Paradoksnost ovakve tvrdnje nije toliko u njenoj „egzotičnosti", nego u kontradikciji s Cantorovom tzv. naivnom (neaksiomatiziranom) teorijom skupova. Naime, pristup poput Cantorovog omogućuje da bilo kakvu kolekciju objekata s nekim svojstvom (primjerice, svi brojevi koji su ordinalni) shvatimo kao skup. Paradoks Burali-Fortija prvi je ukazao na to da se ne može baš svako svojstvo uzeti kao definicijsko za elemente skupa. Zgodno je spomenuti da je upravo te godine kad je otkriven prvi paradoks u teoriji skupova Cantor doživio prvo veliko javno priznanje, i to na prvom Svjetskom matematičkom kongresu u Zürichu gdje su Cantorov rad hvalili mnogi veliki matematičari. Drugi paradoks u teoriji skupova otkrio je sâm Cantor 1899. **Cantorov paradoks** je jednostavniji za shvatiti od Burali-Fortijevog: kad bi postojao skup S svih skupova, on bi morao imati kardinalni broj veći nego svi drugi skupovi. No, kako bi i on bio skup, njegov vlastiti kardinalni broj bio bi jedan od tih od kojih je veći tj. vrijedilo bi $k(S) < k(S)$, što je nemoguće. Dakle, temeljem Cantorovog paradoksa zaključujemo da ne postoji skup svih skupova. Posljednji od znamenitih paradoksa otkrio je 1902. **Bertrand Russell**[13]. **Russellov paradoks** nezavisno od Russella otkrio je i Zermelo, a sastoji se u pokušaju definicije skupa svih objekata koji nisu elementi od samog sebe. Kad bi taj skup

$$A = \{x : x \notin x\}$$

postojao, onda ili $A \in A$ ili $A \notin A$. Ako $A \in A$, po definiciji A slijedi $A \notin A$. Ako pak $A \notin A$ opet po definiciji skupa A dobijemo $A \in A$. U oba moguća slučaja vidimo da smo dobili kontradikciju tj. A nije skup. Popularna verzija ovog paradoks je poznata priča o brijaču: U nekom selu brijač brije sve osobe koje ne briju same sebe (i nikoje druge). Pitanje je tko brije brijača?

Nakon otkrića ovih paradoksa činilo se da je možda Kronecker ipak bio u pravu, no s druge strane teorija skupova je u to doba već imala bitan utjecaj

[13]Bertrand Russell, 1872. - 1970., engleski logičar.

Slika 7.5: Ernst Zermelo, 19./20. st.

na druga područja matematike (primjerice, Henri Lebesgue je 1902. definirao Lebesgueovu mjeru i Lebesgueov integral temeljem teorije skupova). Stoga su matematičari, umjesto da odbace teoriju skupova, počeli tražiti načine da iz nje eliminiraju paradokse.

Jedna od prvih ideja je bila da paradoksi možda potječu od aksioma izbora, uzevši u obzir da se radi o dosta čudnoj, ne baš intuitivnoj tvrdnji. Aksiom izbora kao aksiom prvi je naveo **Ernst Zermelo** (1871. - 1956.). On je 1904. dokazao da ako vrijedi aksiom izbora, onda se svaki skup može dobro urediti (pri čemu općenito ne znamo kako konkretno taj dobri uređaj izgleda). Taj je teorem poznat kao teorem o dobrom uređaju, a hipotezu da on vrijedi postavio je već Cantor. Borel[14] je pak ubrzo zatim uočio da je teorem o dobrom uređaju ekvivalentan aksiomu izbora. Russell je pak pokušao popraviti štetu koju su matematici nanijeli paradoksi teorije skupova tako što je s Whiteheadom objavio djelo *Principia Mathematica* koje pokušava svesti temelje matematike na logiku i bilo je iznimno utjecajno. Ipak, to djelo – iako pokušava dati način da se paradoksi teorije skupova zaobiđu – nije bilo zadovoljavajuće te su se nastavili tražiti putevi za eliminaciju paradoksâ. Tako je 1908. Zermelo prvi pokušao aksiomatizirati teoriju skupova. Taj prvi sustav aksioma nije bio potpuno zadovoljavajući, no doradama (kojima su doprinijeli Fraenkel, von Neumann, Gödel i mnogi drugi) dobiven je danas uobičajeni sustav aksioma (poznat kao **Zermelo-Fraenkelovi aksiomi teorije skupova**) koji s jedne strane onemogućuje pojavu paradoksâ, a s druge strane omogućuje korištenje svih Cantorovih rezultata teorije skupova. Tom sustavu se danas u pravilu kao aksiom dodaje aksiom izbora za kojeg je 1940. **Kurt Gödel**[15] dokazao da se ne može

[14]Émile Borel, 1871. - 1956., francuski matematičar, utemeljio je teoriju mjere i suvremenu teoriju funkcija jedne realne varijable.

[15]Kurt Gödel, 1906. - 1978., dokazao je da u svakom sustavu aksioma postoje tvrdnje koje se ne mogu niti dokazati niti opovrgnuti unutar tog sustava.

opovrgnuti koristeći ostale aksiome teorije skupova, a 1963. je Paul Cohen pokazao da je aksiom izbora nezavisan od ostalih aksioma teorije skupova. Za kraj napomenimo da je danas poznato da je i tvrdnju čiji bezuspješni pokušaji dokaza su kod Cantora potakli prvi napad depresije, hipotezu kontinuuma, nije moguće ni dokazati ni opovrgnuti koristeći Zermelo-Fraenkelov sustav aksioma (bilo sa bilo bez aksioma izbora).

Bibliografija

[1] M. Aigner, E. Behrends (Eds.), Alles Mathematik – von Pythagoras zum CD-Player, *Vieweg Verlag*, 2000.

[2] D. Allen, `http://www.math.tamu.edu/~dallen/history/riemann/riemann.html`

[3] W. S. Anglin, J. Lambek, The Heritage of Thales, *Springer Verlag*, 1995.

[4] W. W. Rouse Ball, A Short Account of the History of Mathematics, *Dover*, 1960.

[5] O. Bekken, B. Johansson,J. Fauvel, V. J. Katz, F. Swetz Learn from the Masters, *MAA*, Washington DC, 1995.

[6] A. Bogomolny Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles, `http://www.cut-the-knot.org/content.shtml`

[7] R. Breusch, *A special case of Egyptian fractions, solution to advanced problem 4512.*, Amer. Math. Monthly 61 (1954) 200ŋ201

[8] Z. Brumbaugh, The Integration Theory of Gottfried Wilhelm Leibniz, `http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers2000/brumbau.html`

[9] F. Cajori, A History of Mathematical Notations, *Dover*, 1993.

[10] C. Daney, `http://cgd.best.vwh.net/home/flt/flt01.htm`

[11] P. Diaconis, Pascal, Fermat and the Invention of Mathematical Probability, `http://www-stat.stanford.edu/~cgates/PERSI/courses/stat_121/lectures/lecture2/`

[12] G. Donald Allen Diophantus, `http://www.math.tamu.edu/~dallen/masters/Greek/diophant.pdf`

[13] D. GINSBURG, The History of the Calculus and the Development of Computer Algebra Systems, http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/index.html

[14] J. GULLBERG Mathematics From the Birth of Numbers, *W. W. Norton&Company*, New York, London, 1997.

[15] D. E. JOYCE Euclid's Elements, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html

[16] D. E. JOYCE History of Mathematics, http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/mathhist.html

[17] V. J. KATZ, ED. Using History to Teach Mathematics , *MAA*, Washington DC, 2000.

[18] A. G. KONFOROWITSCH Guten Tag, Herr Archimedes, *Verlag Harri Deutsch*, Frankfurt, 1996.

[19] R. KNOTT Egyptian Fractions, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html

[20] R. KNOTT Fibonacci Numbers and the Golden Section, http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html

[21] R. MANKIEWICZ Zeitreise Mathematik, *vgs Verlagsgesellschaft*, Köln, 2000.

[22] W. W. ROUSE BALL, A Short Account of the History of Mathematics, *Dover*, 1960.

[23] E. SANDIFER, How Euler Did It, MAA Online, http://www.maa.org/editorial/euler/HowEulerDidIt01Fermatslittletheorem.pdf

[24] D. E SMITH History of Mathematics - Vol. I , *Dover*, New York, 1958.

[25] J. STILWELL, Mathematics and its History, Springer, 2004.

[26] Z. ŠIKIĆ Kako je stvarana novovjeka matematika, *Školska knjiga*, Zagreb, 1989.

[27] D. WEAVER, A. D. SMITH, The History of Mathematical Symbols, http://www.roma.unisa.edu.au/07305/symbols.htm

[28] History of Geometry, http://geometryalgorithms.com/history.htm

[29] The MacTutor History of Mathematics Archive, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/

[30] Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

[31] Pierre de Fermat, http://cerebro.xu.edu/math/math147/02f/fermat/fermattext.html

[32] Earliest Uses of Various Mathematical Symbols, http://jeff560.tripod.com/mathsym.html

Earliest Known Uses of Some of the Words of Mathematics, http://jeff560.tripod.com/mathword.html

[33] The Prime Pages, http://primes.utm.edu/

[34] The Galois Archive, http://www.galois-group.net/

Indeks