

**Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku**  
**Odjel za matematiku**  
**Preddiplomski studij matematike**

Ana Cenkovičan

**Simulacija slučajnog uzorka iz  
neprekidne slučajne varijable**

Završni rad

**Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku**  
**Odjel za matematiku**  
**Preddiplomski studij matematike**

Ana Cenkovičan

**Simulacija slučajnog uzorka iz  
neprekidne slučajne varijable**

Završni rad

*Voditelj:* prof. dr. sc. Mirta Benšić  
dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2010.

**Sažetak.** U ovom završnom radu pokazali smo kako slučajna varijabla zadana bilo kojom funkcijom distribucije  $F$  može biti transformirana u slučajnu varijablu zadanu uniformnom distribucijom na intervalu  $(0, 1)$ . No pokazali smo i da uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu  $(0, 1)$  može biti transformirana u slučajnu varijablu sa bilo kojom funkcijom distribucije  $F$ . Upravo ta transformacija iz uniformno distribuirane slučajne varijable na intervalu  $(0, 1)$  u slučajnu varijablu sa bilo kojom funkcijom distribucije  $F$  je važna komponenta procesa simuliranja slučajnog uzorka. Inverzna transformacija, metoda odbacivanja, metoda parametrizacije samo su neke od osnovnih tehnika simuliranja slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable. Slučajne varijable  $X_1, \dots, X_n$  čine slučajni uzorak duljine  $n$  iz populacije s funkcijom distribucije  $F$  ako su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom distribucije  $F$ . Kroz primjere pokazali smo u *Mathematica* programu simulacije većinom za uzorke duljine 10000.

**Ključne riječi:** neprekidne slučajne varijable, simulacija, slučajni uzorak

**Abstract. (Simulation of a random sample from a continuous random variable)** In this final paper we have indicated how a random variable having any continuous distribution function  $F$  can be transformed into a random variable having a uniform probability distribution on the interval  $(0, 1)$ . But, we have also indicated that a random variable having a uniform probability distribution on the interval  $(0, 1)$  can be transformed into a random variable having any continuous distribution function  $F$ . This transformation from a random variable having uniform probability distribution on the interval  $(0, 1)$  to a random variable having any continuous distribution function  $F$  is important component of a process called simulation of a random sample. The Inverse Transformation Method, The Rejection Method and The Hazard Rate Method are some of the main techniques for the simulation of a random sample from a continuous random variable. Random variables  $X_1, \dots, X_n$  form a random sample of a length  $n$  from population with distribution function  $F$  if  $X_1, \dots, X_n$  are independent and equally distributed random variables with the joint distribution function  $F$ . Through the examples in *Mathematica* program we have shown simulation mostly for the random sample of 10000.

**Keywords:** continuous random variables, random sample, simulation

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Slučajan uzorak</b>	<b>2</b>
<b>3. Neprekidne slučajne varijable i simulacija slučajnog uzorka dimenzije 10000</b>	<b>7</b>
3.1. Uniformna distribucija na intervalu $[a, b]$ . . . . .	7
3.2. Eksponencijalna distribucija s parametrom $\lambda > 0$ . . . . .	8
3.3. Dvostruka eksponencijalna ili Laplaceova distribucija sa parametrom $\lambda > 0$ . . . . .	10
3.4. Normalna distribucija s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$ . . . . .	11
3.5. Cauchyjeva distribucija s parametrima $a$ i $b$ . . . . .	12
3.6. Gama distribucija s parametrima $\alpha$ i $\beta$ . . . . .	13
3.7. Beta distribucija s parametrima $p$ i $q$ . . . . .	14
<b>4. Osnovne tehnike simuliranja slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable</b>	<b>16</b>
4.1. Inverzna transformacija . . . . .	19
4.2. Metoda odbacivanja . . . . .	24
4.3. Parametrizacija . . . . .	30
<b>5. Specijalne tehnike simuliranja neprekidne slučajne varijable</b>	<b>33</b>
<b>6. Zaključak</b>	<b>38</b>

## **1. Uvod**

Simulacija je proces oblikovanja modela stvarnog ili zamišljenog sustava, te provođenja eksperimenta nad njim. Svrha je razumijevanje ponašanja sustava i određivanje strategija rada. U praksi odgovore na ta pitanja teško je analitički odrediti. Eksperiment s realnim sustavom može biti skup, a u nekim situacijama nemoguć. Upravo zbog toga javlja se potreba za simulacijom. Simulacijom zapravo dolazimo do boljeg saznanja o stvarnom sustavu.

Osnova simulacija su slučajni uzorci. O slučajnim uzorcima i načinu na koji su generirani slučajni brojevi, preciznije pseudoslučajni, govorit ćemo u drugom poglavlju. U teoriji vjerojatnosti uglavnom se promatraju, odnosno u primjenama pojavljuju diskretne i neprekidne slučajne varijable. U ovom radu ograničit ćemo se na neprekidne slučajne varijable. U trećem poglavlju navest ćemo osnovne neprekidne slučajne varijable zadane funkcijom gustoće. Dok ćemo o korištenju slučajnih brojeva za generiranje neprekidne slučajne varijable govoriti u četvrtom poglavlju. Opisat ćemo neke od osnovnih metoda za simulaciju slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable i kroz primjere napraviti programe za simulaciju.

## 2. Slučajan uzorak

**Definicija 2.1** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X$  slučajna varijabla na  $\Omega$  s funkcijom distribucije  $F$ . Kažemo da  $X_1, \dots, X_n$  čine slučajni uzorak duljine  $n$  iz populacije s funkcijom distribucije  $F$  ako su  $X_1, \dots, X_n$  nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable sa zajedničkom funkcijom distribucije  $F$ .*

Ako funkcija  $F$  ima gustoću  $f$ , tj. ako je  $X$  neprekidna ili diskretna slučajna varijabla s gustoćom  $f$ , kažemo da je uzorak uzet iz gustoće  $f$ . Realizacija slučajnog uzorka duljine  $n$  odgovara nizu od  $n$  nezavisnih mjerenja slučajnog svojstva nekog statističkog skupa, i to slučajnog svojstva koje se opisuje slučajnom varijablom  $X$ .

Očito ostaje pitanje kako generirati, ili simulirati, slučajan vektor sa zadanom funkcijom distribucije. Prvi korak je da generiramo slučajnu varijablu iz uniformne distribucije na intervalu  $(0, 1)$ . Pokazat ćemo kako se to u povijesti radilo. Tablica vrijednosti uniformne slučajne varijable na  $(0, 1)$  poznata je kao tablica slučajnih brojeva i (*Slika 1*) prikazuje jednu takvu tablicu.

Objasnit ćemo ukratko upotrebu tablice slučajnih brojeva. Pretpostavimo da od 3000 zaposlenih u jednom poduzeću za uzorak treba izabrati 60 zaposlenih. Kao okvir za izbor poslužit će nam isplatne liste u koje su unesena prezimena zaposlenih po abecedi pod posebnim rednim brojem. Budući da je broj jedinica u osnovnom skupu četveroznamenasti broj, iz tablice slučajnih brojeva treba izabrati 60 četveroznamenastih brojeva između 0001 i 3000. Proizvoljno se odredi sustav izbora brojeva iz tablice slučajnih brojeva, npr. tako da se uzimaju po četiri znamenke u istom retku, pa sljedeće četiri ispod prethodnih itd., sve do kraja stranice, a zatim se opet nastavi na početku stranice, samo četiri znamenke dalje, ili tako da se uzimaju po četiri znamenke okomito u istom stupcu, ili se odabere neki drugi sustav. Gdje ćemo početi izbor brojeva, treba odrediti slučajno. Kad smo tako iz tablice slučajnih brojeva izabrali 60 brojeva, treba identificirati elemente izabrane u uzorak. U našem primjeru u isplatnoj listi, pročitat ćemo prezimena uz one redne brojeve koji su izabrani prema tablici slučajnih brojeva. Zaposlenici s tim prezimenima i imenima izabrani su u uzorak.

Brojevi iz tablice slučajnih brojeva sa decimalnom točkom ispred, smatraju se kao vrijednosti uniformne slučajne varijable na  $(0, 1)$ . Za primjer uzmimo slučajno izabran broj 14379 iz tablice slučajnih brojeva, tada vrijednost uniformne slučajne varijable na  $(0, 1)$  iznosi 0.14379.

08508	32106	51974	62471	93713	14379	24030	05903	11939
45656	66295	23207	02395	92939	40798	05132	89590	34718
33928	10372	92243	15724	97214	10531	37551	62320	40291
69937	12892	88085	89939	14899	42287	40520	72675	17779
74112	74853	16691	24751	30053	59522	61124	41543	40300
90689	42932	11302	69784	78000	24339	96847	37829	86554
03254	33465	64264	51794	94993	95086	40582	67593	03775
85614	88771	22228	63325	44863	72073	24089	20052	45719
86498	38126	30831	94378	07600	91048	22347	65840	53920
83710	48753	64771	56284	35347	41171	06772	34141	16905
54812	28862	57363	61558	68877	33649	07137	14646	96808
46069	29295	73449	14992	81522	16786	72843	29487	91214
98806	00378	56935	02019	50106	80126	58851	70486	50363
39619	81264	51349	82951	40546	32112	97243	27570	73768
39231	19363	26973	14083	85996	72852	36584	83179	68575
72907	87771	85453	09976	00089	13250	60258	98907	96324
28128	75037	45104	10532	17943	19126	12928	68482	72721
15600	82635	88096	47220	94724	34436	50844	74834	16590
06705	62019	52549	89542	03013	94503	48711	81546	39549
61683	65631	85761	51897	28139	88612	29759	53081	20029
45001	65301	15429	57662	41544	88545	58665	41584	89122
21119	64390	15357	69790	44458	66118	76133	60562	84150
86844	36815	04236	61121	45315	29411	37089	63186	15953
74596	87178	40209	70162	77471	62551	05670	97891	63173
23717	76219	13359	40501	28224	82466	43233	91302	44408
45054	64532	75437	13650	49820	38253	59968	83895	14014
85289	00221	69338	51689	16090	81156	02011	16977	60327
26175	26872	90257	07236	71620	23072	88762	20341	25006
63259	18678	52021	78626	78021	57992	15867	27011	50842
02773	43851	59382	95793	49815	05937	71602	34895	34581
61252	80074	59276	84763	11223	22891	75671	46649	72755
93219	73585	44469	15082	25169	26028	87826	97213	78270
42027	52124	60859	18839	79449	28637	34028	20485	42414
41585	51383	22464	02665	12335	49753	77739	34741	27747
15259	06071	17126	72741	22580	65932	75921	58615	08893
28528	71994	84355	73719	53244	43648	68087	84599	27298
05750	02579	43123	81273	24023	79502	92791	88577	83368
12741	62322	24707	84707	94484	24336	35244	66572	40374
12578	12124	16639	12851	16623	23112	54056	79660	37044
39716	83950	96478	21089	37788	11160	06230	91654	55359
86057	28363	03497	34034	25556	29928	11818	89048	51863
42738	72520	83942	66757	17989	82728	38784	43394	92825
43634	11750	12528	28826	06678	68756	80090	26774	65589
95728	05421	39144	69996	94444	93051	42212	15502	95447
88615	29148	33922	64326	82835	59113	78432	17519	29045

Slika 1: Tablica slučajnih brojeva

To nije način kako računalo simulira uniformnu slučajnu varijablu na  $(0,1)$ . U praksi se umjesto slučajnih brojeva koriste pseudoslučajni brojevi, koji nisu u potpunosti slučajni. Oni se računaju iz matematičkih formula ili se jednostavno uzimaju sa neke liste već unaprijed sastavljenih brojeva. Razvoj teorije pseudoslučajnih brojeva i algoritama za njihovo ostvarivanje je dosegao visoku razinu te su tako dobri da ti brojevi izgledaju isto kao da su slučajni. Pseudoslučajni brojevi imaju karakteristiku da su predvidljivi, što znači da se mogu predvidjeti ako znamo neke parametre tih brojeva, kao što je prvi broj. Svi generatori pseudoslučajnih brojeva se baziraju na rekurzivnim aritmetičkim ili logičkim formulama. Prilikom izračunavanja sljedećeg elementa niza slučajnih brojeva možemo se koristiti sa samo jednim ili sa više već izračunatih članova niza, a operacije nad njima mogu biti matematičke, ili ako se gledaju bitovni zapisi brojeva, logičke. Svaki takav generator zahtjeva neku početnu vrijednost, te još nekoliko parametara, koji onda služe kao koeficijenti ili kao konstante. Najviše korišten aritmetički generator je linearni kongruentni generator. Ovaj generator pseudoslučajnih brojeva se služi sljedećom rekurzijom:

$$X_{i+1} = (aX_i + c)(\text{mod } m)$$

$$\text{gdje } 0 \leq X_i \leq m - 1$$

$\frac{X_i}{m}$  je aproksimacija uniformne slučajne varijable na  $(0, 1)$

$X_0$  je početna vrijednost (sjeme)

Dobar izbor parametara  $(m, a, c, X_0)$  daje dobra svojstva generiranog niza. Navest ćemo jedan primjer u kojem ćemo generirati slučajne brojeve, točnije pseudoslučajne, koristeći linearni kongruentni generator. Pokazat ćemo generiranje za različite parametre, male i velike.

### Primjer 2.1

$$x_{k+1} = (14x_k + 9)(\text{mod } 34)$$

$$x_0 = 8$$

*Mathematica program*<sup>1</sup>

```
x[n_]:=x[n]=Mod[a * x[n - 1] + c, m];
a = 14;
c = 9;
```

<sup>1</sup>Svi programi u ovom radu napisani su u *Mathematica 5.2*

U svakom je potrebno najprije pozvati

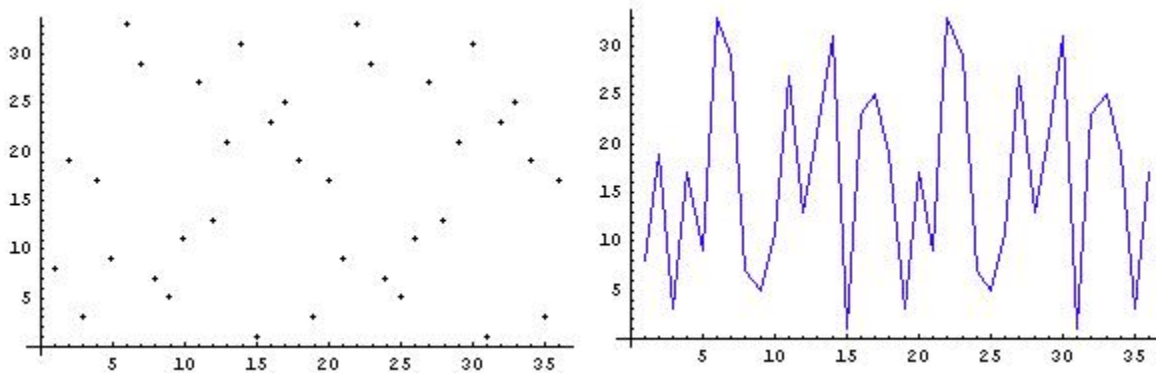
```
<< Graphics`Graphics`
<< Statistics`ContinuousDistributions`
<< Statistics`DataManipulation`
```

```

m = 34;
x[0] = 8;
serija = Table[x[i], {i, 0, 35}]
ListPlot[serija, PlotStyle -> PointSize[0.013]]
ListPlot[serija, PlotJoined -> True, PlotStyle -> Hue[0.7]]

```

{8, 19, 3, 17, 9, 33, 29, 7, 5, 11, 27, 13, 21, 31, 1, 23, 25, 19,  
 3, 17, 9, 33, 29, 7, 5, 11, 27, 13, 21, 31, 1, 23, 25, 19, 3, 17}



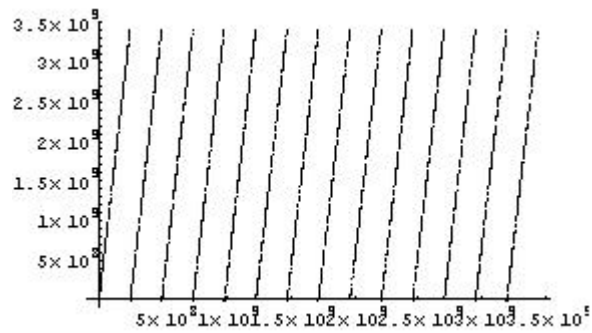
Slika 2: Generiranje slučajnih brojeva linearnim konguentnim generatorom

*Slučaj kada je m velik broj:*

```

x[n_] := x[n] = Mod[a * x[n-1] + c, m];
a = 14;
c = 9;
m = 3436779217;
x[0] = 8;
serija = Table[x[i], {i, 0, 9999}];
parovi = Partition[serija, 2];
ListPlot[parovi, PlotStyle \[Rule] PointSize[0.005]]

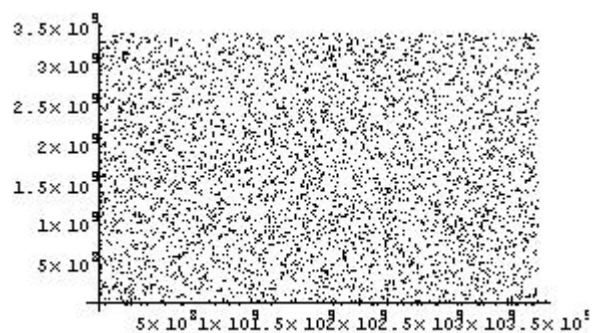
```



Slika 3: Generiranje slučajnih brojeva linearnim kongruentnim generatorom kada je m veliki

*Slučaj kada su svi parametri veliki brojevi:*

```
x[n_]:=x[n]=Mod[a * x[n-1]+c,m];
a=145581;
c=987743;
m=3436779217;
x[0]=8;
serija=Table[x[i],{i,0,9999}];
parovi=Partition[serija,2];
ListPlot[parovi,PlotStyle\ [Rule]PointSize[0.005]]
```



Slika 4: Generiranje slučajnih brojeva kada su svi parametri u linearnom kongruentnom generatoru veliki

### 3. Neprekidne slučajne varijable i simulacija slučajnog uzorka dimenzije 10000

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X$  slučajna varijabla na  $\Omega$ . Način na koji računamo vjerojatnosti događaja vezanih za  $X$  ovisi o tipu slučajne varijable  $X$ . U teoriji vjerojatnosti postoje dva glavna tipa slučajnih varijabli, a to su diskretne i neprekidne. Slučajna varijabla  $X$  je diskretna ako postoji konačan ili prebrojiv skup  $D \subset \mathbb{R}$  takav da je  $P\{X \in D\} = 1$ . Kao što sam već rekla, ograničit ću se na neprekidne slučajne varijable. Pa definirajmo neprekidnu slučajnu varijablu.

**Definicija 3.1** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija takva da je skup  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}$  element od  $\mathcal{F}$  za  $\forall x \in \mathbb{R}$  i takva da postoji nenegativna funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana izrazom

$$P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(\{X \leq x\}) = \int_{-\infty}^x f(t)dt.$$

Takvu funkciju  $X$  zovemo (apsolutno) neprekidna slučajna varijabla, a funkciju  $f$  zovemo funkcija gustoće slučajne varijable  $X$ .

**Definicija 3.2** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna slučajna varijabla. Funkcija  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  zadana izrazom

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

zove se funkcija distribucije slučajne varijable  $X$ .

Za neprekidnu slučajnu varijablu funkcija distribucije definirana je na sljedeći način:

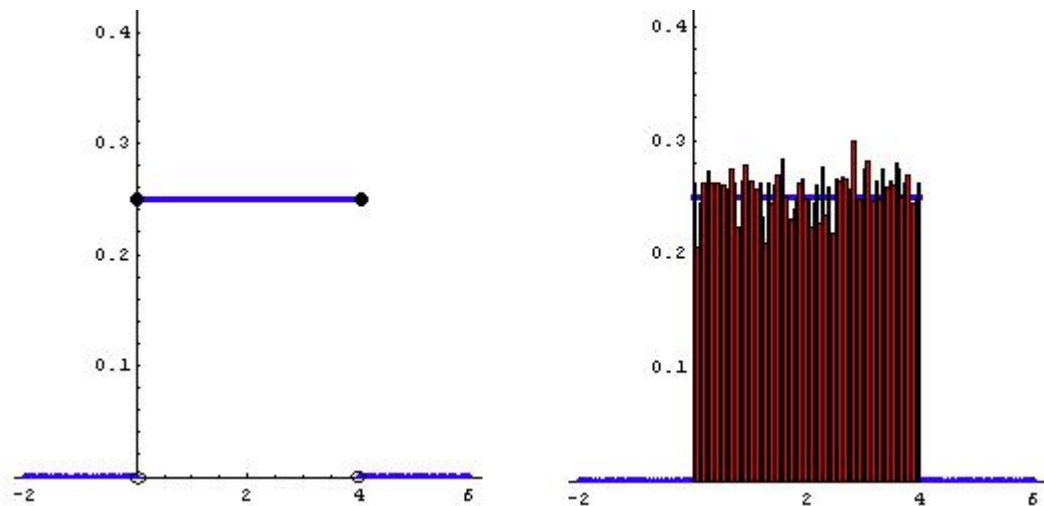
$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Navest ćemo najčešće primjere parametarski zadanih neprekidnih slučajnih varijabli.

#### 3.1. Uniformna distribucija na intervalu $[a, b]$

Slučajna varijabla  $X$  ima uniformnu distribuciju na intervalu  $[a, b]$ ,  $a < b$ , ako je njena funkcija gustoće  $f$  dana izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in [a, b] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases} \quad (1)$$



Slika 5: Simulacija slučajnog uzorka duljine 10000 iz neprekidne slučajne varijable zadane uniformnom distribucijom na intervalu  $[0, 4]$

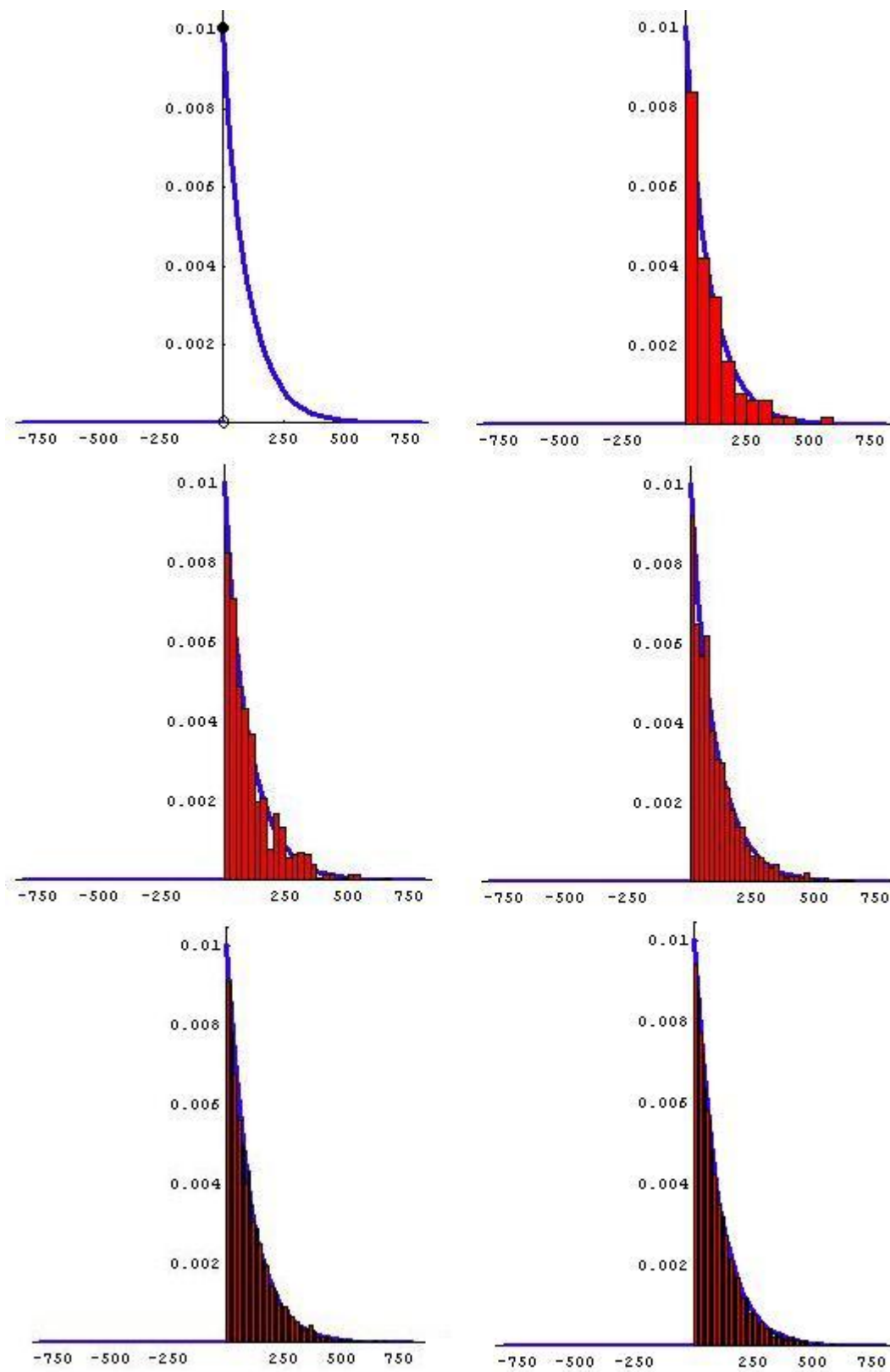
Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Udist = UniformDistribution[0,4];
g1 = Plot[PDF[Udist, x], {x, -2, 0}, PlotRange -> {0, 0.42}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
g2 = Plot[PDF[Udist, x], {x, 0, 4}, PlotRange -> {0, 0.42}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
g3 = Plot[PDF[Udist, x], {x, 4, 6}, PlotRange -> {0, 0.42}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
Show[g1,g2,g3]
udata = Table[Random[UniformDistribution[0, 4]], {10000}];
d = Histogram[udata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1]
Show[g1, g2, g3, d]
```

### 3.2. Eksponencijalna distribucija s parametrom $\lambda > 0$

Slučajna varijabla  $X$  ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom  $\lambda > 0$  ako je njena funkcija gustoće  $f$  zadana izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (2)$$



Slika 6: Simulacija slučajnog uzorka duljine 100, 500, 1000, 5000, 10000 iz neprekidne slučajne varijable zadane eksponencijalnom distribucijom s parametrom  $\lambda = 0.01$

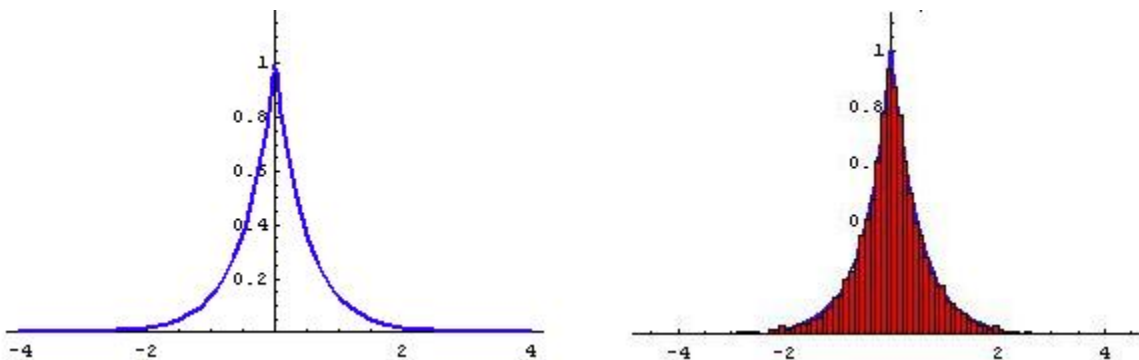
Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
expdist = ExponentialDistribution[0.01];
g1 = Plot[PDF[expdist, x], {x, -800, 0}, PlotRange -> {0, 0.0105},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.015]};
g2 = Plot[PDF[expdist, x], {x, 0, 800}, PlotRange -> {0, 0.0105},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.015]};
Show[g1, g2]
edata = Table[Random[ExponentialDistribution[0.01]], {10000}];
d = Histogram[edata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Show[g1, g2, d]
```

### 3.3. Dvostruka eksponencijalna ili Laplaceova distribucija sa parametrom $\lambda > 0$

Slučajna varijabla  $X$  ima dvostruku eksponencijalnu ili Laplaceovu distribuciju s parametrom  $\lambda > 0$  ako je njena funkcija gustoće  $f$  zadana izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda x} & , x < 0 \end{cases} \quad (3)$$



Slika 7: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane dvostrukom eksponencijalnom distribucijom s parametrom  $\lambda = 1$

Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Ldist = LaplaceDistribution[0, 0.5] ;
g = Plot[PDF[Ldist, x], {x, -4, 4}, PlotRange -> {0, 1.2},
  AspectRatio -> 0.6, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
ldata = Table[Random[LaplaceDistribution[0, 0.5]], {10000}];
d = Histogram[ldata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Show[g, d]
```

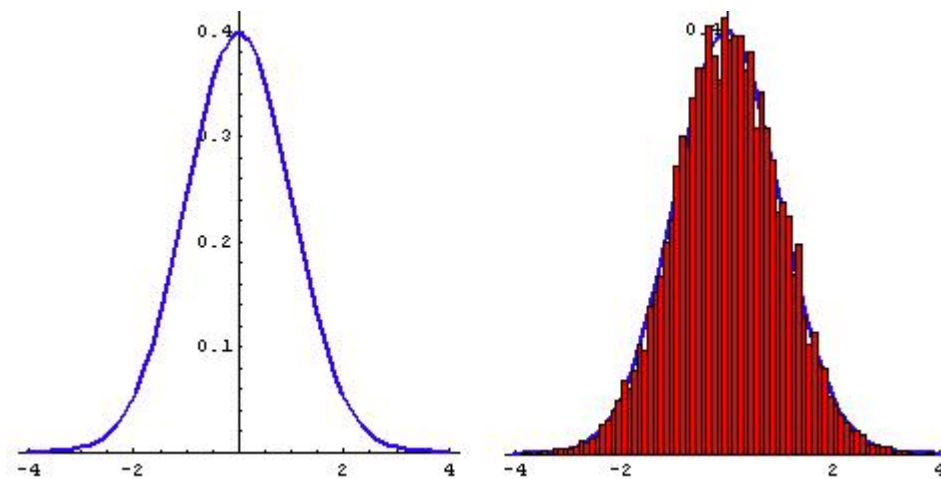
### 3.4. Normalna distribucija s parametrima $\mu$ i $\sigma^2$

Slučajna varijabla  $X$  ima normalnu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\sigma^2$  ako je njena funkcija gustoće  $f$  zadana izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako  $X$  ima normalnu distribuciju s parametrima  $\mu = 0$  i  $\sigma^2 = 1$ , onda kažemo da  $X$  ima standardnu normalnu funkciju i pišemo  $X \sim N(0, 1)$ .

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$



Slika 8: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane normalnom distribucijom s parametrima  $\mu = 0$  i  $\sigma^2 = 1$

Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Ndist = NormalDistribution[0, 1];
g = Plot[PDF[Ndist, x], {x, -4, 4}, PlotRange -> {0, 0.42}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
mdata = Table[Random[NormalDistribution[]], {10000}];
d = Histogram[mdata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Show[g,d]
```

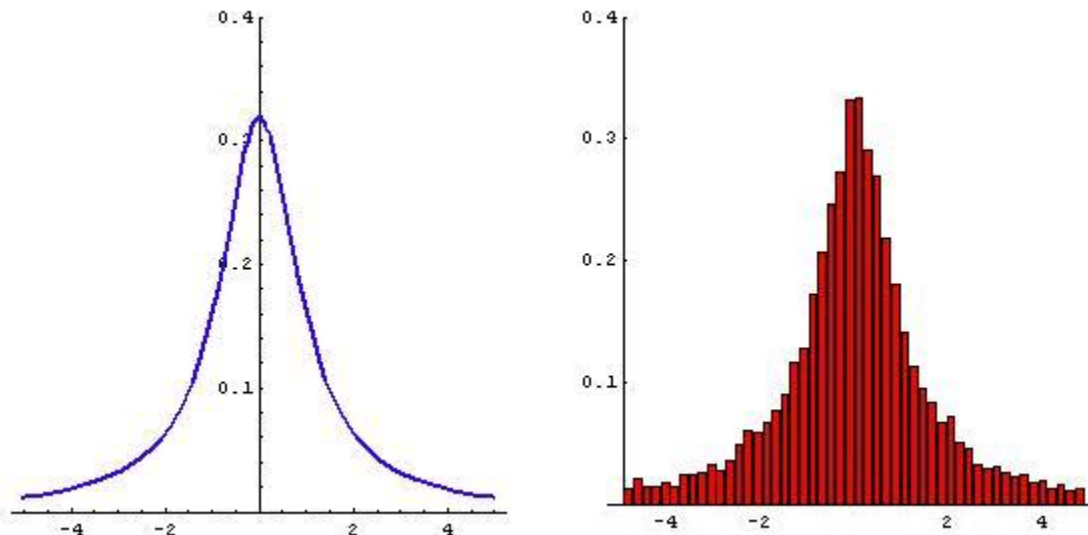
### 3.5. Cauchyjeva distribucija s parametrima $a$ i $b$

Neka su  $a, b \in \mathbb{R}$  i  $a > 0$ . Neprekidna slučajna varijabla  $X$  ima Cauchyjevu distribuciju s parametrima  $a$  i  $b$  ako je njena funkcija gustoće  $f$  zadana izrazom:

$$f(x) = \frac{a}{\pi[a^2 + (x - b)^2]}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ako slučajna varijabla  $X$  ima Cauchyjevu distribuciju s parametrima  $a = 1$  i  $b = 0$ , onda kažemo da slučajna varijabla  $X$  ima jediničnu Cauchyjevu distribuciju.

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$



Slika 9: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane cauchy distribucijom s parametrima  $a = 1$  i  $b = 0$

Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Cdist = CauchyDistribution[0, 1];
g = Plot[PDF[Cdist, x], {x, -5, 5}, PlotRange -> {0, 0.4}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
UzorakN=RandomArray[Cdist,10000];
frekvencije=BinCounts[UzorakN,{-5, 5, 0.2}];
BarChart[frekvencije]
relativnefrekvencije = N[frekvencije/(10000*0.2)];
labels=Table[i, {i, -5, 5, 0.2}];
h=BarChart[relativnefrekvencije,PlotRange->{0, 0.4},
  BarLabels->labels, AspectRatio->1]
Show[GraphicsArray[{g, h}]];
```

### 3.6. Gama distribucija s parametrima $\alpha$ i $\beta$

Neka su  $\alpha > 0$  i  $\beta > 0$ . Neprekidna slučajna varijabla  $X$  ima gama distribuciju s parametrima  $\alpha$  i  $\beta$  ako je njena funkcija gustoće zadana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}, \quad (6)$$

gdje je  $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ ,  $x > 0$  gama funkcija.

Za  $x > 0$  vrijedi  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Pokažimo da to zaista vrijedi:

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \left| \begin{array}{l} u = t^x \quad dv = e^{-t} dt \\ du = xt^{x-1} dt \quad v = -e^{-t} \end{array} \right| \\ &= -t^x e^{-t} \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = -\lim_{t \rightarrow \infty} (t^x e^{-t} - 0 \cdot e^0) + x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Da bi nastavili potrebno je pokazati:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^x e^{-t} = (\infty \cdot 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^x}{e^t} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{(L'H)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{xt^{x-1}}{e^t}\right) = \dots = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x!}{e^t} = 0.$$

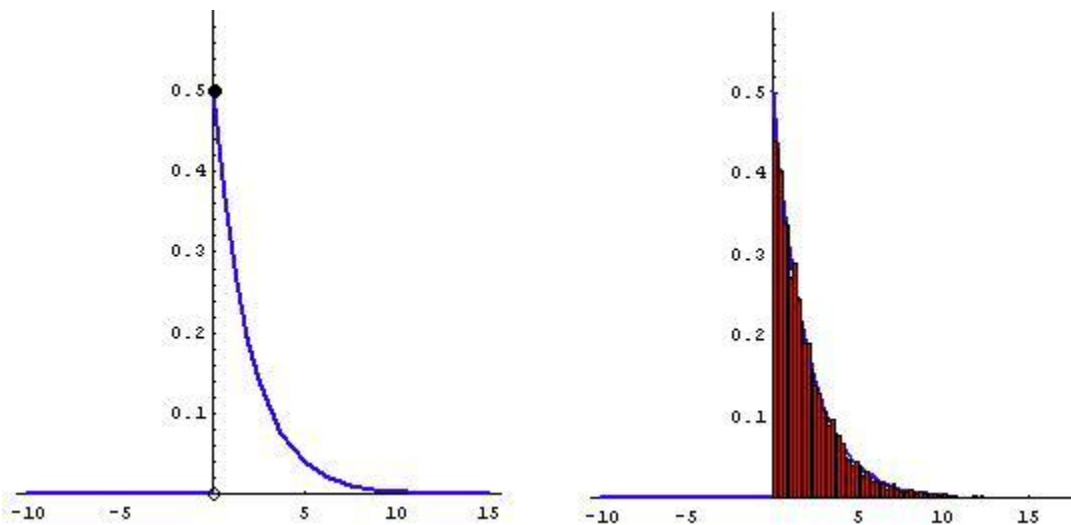
Slijedi da je

$$\Gamma(x+1) = 0 + x\Gamma(x) = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

Pokažimo još neka svojstva  $\Gamma$  funkcije:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^\infty = 1$$

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!\Gamma(1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$



Slika 10: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane gama distribucijom s parametrima  $\alpha = 1$  i  $\beta = 2$

Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Gdist = GammaDistribution[1, 2];
g1 = Plot[PDF[Gdist, x], {x, -10, 0}, PlotRange -> {0, 0.6},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
g2 = Plot[PDF[Gdist, x], {x, 0, 15}, PlotRange -> {0, 0.6}, AspectRatio -> 1,
  PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
Show[g1, g2]
gdata = Table[Random[GammaDistribution[1, 2]], {10000}];
d = Histogram[gdata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1]
Show[g1, g2, d]
```

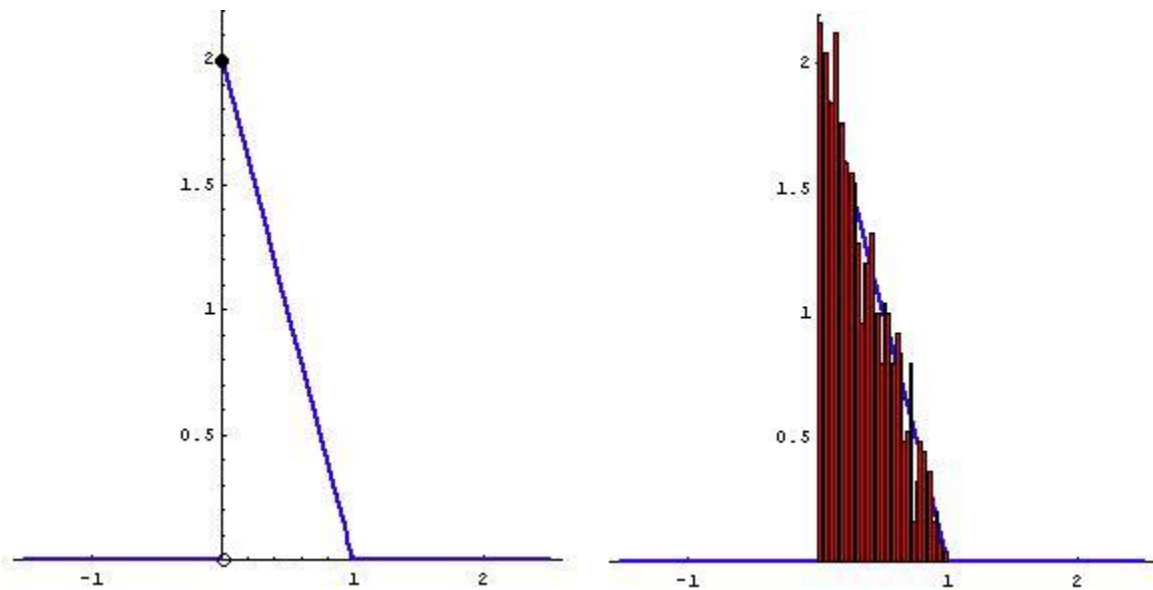
### 3.7. Beta distribucija s parametrima $p$ i $q$

Neka su  $p > 0$ ,  $q > 0$  fiksni. Neprekidna slučajna varijabla  $X$  ima beta distribuciju s parametrima  $p$  i  $q$  ako je njena funkcija gustoće zadana izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{B(p,q)} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1 \end{cases} , \quad (7)$$

gdje je  $B$  beta funkcija

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, x > 0, y > 0$$



Slika 11: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane beta distribucijom s paramterima  $p = 1$  i  $q = 2$

Pripadajući program za simulaciju napisan u *Mathematica* programu koristeći gotove *Mathematica* naredbe:

```
Bdist = BetaDistribution[1, 2];
g1 = Plot[PDF[Bdist, x], {x, -1.5, 0}, PlotRange -> {0, 2.2},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
g2 = Plot[PDF[Bdist, x], {x, 0, 2.5}, PlotRange -> {0, 2.2},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]}];
Show[g1, g2]
bdata = Table[Random[BetaDistribution[1, 2]], {1000}];
d = Histogram[bdata, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Show[g1, g2, d]
```

## 4. Osnovne tehnike simuliranja slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable

**Definicija 4.1** Neka je  $X$  neprekidna slučajna varijabla sa funkcijom distribucije  $F$ . Tada  $Y = F(X)$  nazivamo vjerojatnosno integralna transformacija od  $X$ .<sup>2</sup>

**Teorem 4.1** Neka je  $Y = F(X)$  transformacija neprekidne slučajne varijable  $X$  njezinom funkcijom distribucije  $F$ . Tada slučajna varijabla  $Y$  ima uniformnu distribuciju na intervalu  $(0, 1)$ , tj.  $Y \sim U(0, 1)$

### Dokaz

U dokazu ovog teorema koristit ćemo rezultate dva teorema, pa ih najprije iskažimo.

**Teorem 4.2** Pretpostavimo da neprekidna slučajna varijabla  $X$  ima funkciju gustoće  $f(x)$ . Neka je  $g(x)$  neprekidno derivabilna funkcija za koju vrijedi  $\frac{dg}{dx} \neq 0$  za svaki  $x$  u nekom otvorenom intervalu  $\Delta \subseteq \Xi$ . Neka je inverzna funkcija  $x = g^{-1}(y)$  definirana za svaki  $y \in \Psi = \{y : y = g(x), x \in \Xi\}$ . Tada je funkcija gustoće od  $Y = g(X)$  dana sa

$$h(y) = \begin{cases} f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & , y \in \Psi \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

**Teorem 4.3** Ako funkcija izvodnica momenta postoji za slučajnu varijablu  $X$  koja ima funkciju gustoće  $f(x)$ , onda je funkcija izvodnica momenta jedinstvena.

Obrat: Funkcija izvodnica momenta određuje funkciju gustoće od  $X$  jedinstveno, barem za skup točaka koje imaju vjerojatnost 0.

Nastavimo sada sa dokazom.

(i) Slučaj kad je  $F$  derivabilna na otvorenom intervalu koji sadrži nosač funkcije gustoće  $f$  i derivacija funkcije  $F$  je neprekidna na tom intervalu, tj. funkcija gustoće  $f$  je neprekidna na tom otvorenom intervalu. To znači da je  $F$  neprekidno derivabilna funkcija. Kako je  $F$  strogo rastuća  $\frac{dF}{dx} = f(x) > 0, \forall x$  iz nosača funkcije gustoće  $f$  i sa  $x = F^{-1}(y)$  definiramo inverznu funkciju  $\forall y \in (0, 1)$ .

Prema prethodnom teoremu (Teorem 4.2) funkcija gustoće za  $Y$  glasi:

$$h(y) = \begin{cases} f(F^{-1}(y)) \left| \frac{dF^{-1}(y)}{dy} \right| & , y \in (0, 1) \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

Kako je

$$\frac{dF^{-1}(y)}{dy} = \frac{dx}{dF(x)} = \left( \frac{dF(x)}{dx} \right)^{-1} = (f(x))^{-1}$$

<sup>2</sup>eng. = probability integral transformation

i  $f(F^{-1}(y)) = f(x)$  slijedi,

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 & , y \in (0, 1) \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

$\Rightarrow Y$  je uniformno distribuirana na intervalu  $(0, 1)$ .

Prije dokaza drugog smjera definirajmo funkciju izvodnicu momenta:

**Definicija 4.2** Neka je  $X$  neprekidna slučajna varijabla takva da je za neki  $\delta > 0$

$$E[e^{tX}] < \infty, \quad |t| < \delta$$

Tada definiramo funkciju izvodnicu momenata  $M_X$  s

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

(ii) Slučaj kad  $X$  ima funkciju izvodnicu momenta  $M_X(t)$

$$M_Y(t) = E[e^{Yt}] = E[e^{F(X)t}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{F(X)t} f(x) dx = \left| \begin{array}{l} y = tF(x) \\ dy = tf(x) dx \\ dx = \frac{1}{tf(x)} dy \end{array} \right|$$

Pozivanjem na osnovna svojstva funkcije distribucije odredimo granice integracije.

$$F(-\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = tF(-\infty) = 0$$

$$F(\infty) = 1 \quad \Rightarrow \quad y = tF(\infty) = t.$$

Sada nastavimo,

$$= \int_0^t \frac{e^y}{t} dy = \frac{1}{t} \int_0^t e^y dy = \frac{e^t - 1}{t}, \quad t \neq 0$$

Odredimo funkciju izvodnicu momenta za uniformnu slučajnu varijablu na intervalu  $(0, 1)$ :

$$M_X(t) = E[e^{Xt}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{xt} f(x) dx,$$

gdje je  $f(x)$  funkcija gustoće uniformne slučajne varijable na intervalu  $(0, 1)$ .

Nastavimo li sa raspisivanjem slijedi:

$$= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^1 e^{xt} dx + \int_1^{\infty} 0dx = \frac{e^{xt}}{t} \Big|_0^1 = \frac{e^t - 1}{t}, \quad t \neq 0$$

$\Rightarrow$  prema Teoremu 4.3  $Y$  je uniformno distribuirana na intervalu  $(0, 1)$ .

□

Prethodni teorem (Teorem 4.1) nam pokazuje kako slučajna varijabla zadana bilo kojom funkcijom distribucije  $F$  može biti transformirana u slučajnu varijablu s uniformnom distribucijom na intervalu  $(0, 1)$ . Zanima nas vrijedi li suprotan smjer tog teorema, tj. da li uniformno distribuirana slučajna varijabla na intervalu  $(0, 1)$  može biti transformirana u slučajnu varijablu sa bilo kojom funkcijom distribucije  $F$ . U sljedećim potpoglavljima sugerirane su neke procedure, tj. metode koje se mogu koristiti za simuliranje slučajnog uzorka iz bilo koje neprekidne slučajne varijable sa funkcijom distribucije  $F$ . Obično počinju sa generiranjem slučajnog uzorka od nezavisnih uniformno distribuiranih slučajnih varijabli na intervalu  $(0,1)$ , a o tome je bilo više riječi u poglavlju 2.

Pogledajmo kako (Teorem 4.1) može biti koristan u praksi. Recimo da je  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  slučajan uzorak sa funkcijom gustoće  $f(x_1, \dots, x_n)$

$$E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

za neku  $n$  dimenzionalnu funkciju  $g$ . Za primjer uzmimo da  $g$  prikazuje zadržavanje u redu za prvih  $n/2$  stranaka,  $X$  predstavlja prvih  $n/2$  dolazaka i vrijeme usluživanja. U mnogim situacijama nije moguće riješiti integral. Jedina mogućnost koja preostaje je da aproksimiramo  $E[g(\mathbf{X})]$  tj. simuliramo. Da bi aproksimirali  $E[g(\mathbf{X})]$  prvo generiramo slučajan vektor  $\mathbf{X}^{(1)} = (X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)})$  sa funkcijom gustoće  $f(x_1, \dots, x_n)$ . Zatim izračunamo  $Y^{(1)} = g(\mathbf{X}^{(1)})$ . Sada generiramo drugi slučajan vektor nezavisan od prvog.  $\mathbf{X}^{(2)}$  i izračunamo  $Y^{(2)} = g(\mathbf{X}^{(2)})$ . Ponavljamo postupak sve do  $r \in \mathbb{N}$ . Neprekidna i jedinstveno distribuirana slučajna varijabla  $Y^{(i)} = g(\mathbf{X}^{(i)})$ ,  $i = 1, \dots, r$  je generirana. Sada prema jakim zakonima velikih brojeva, tačnije Kolmogorovljevom teoremu <sup>3</sup>, znamo da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{Y^{(1)} + \dots + Y^{(r)}}{r} = E[Y^{(i)}] = E[g(\mathbf{X})]$$

<sup>3</sup>vidi [3, str. 416.]

Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz  $(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j, n \in \mathbb{N})$  konvergira ako i samo ako  $E[X_1]$  postoji i u tom slučaju je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = E[X_1]$$

pa možemo uzeti srednju vrijednost generiranog  $Y$  za procjenu  $E[g(\mathbf{X})]$ . Takav pristup zove se *Monte Carlo simulacija*. Naziv *Monte Carlo* uvode 1940. god. Von Neuman i Ulam za metodu rješavanja determinističkog problema vezanih za slučajne brojeve. Metoda se razvija tijekom II. svjetskog rata za rješavanje složenih problema pri izgradnji atomske bombe.

#### 4.1. Inverzna transformacija

To je osnovna metoda i temelji se na sljedećoj propoziciji.

**Propozicija 4.1** *Neka je  $Y \sim U(0, 1)$  i  $F$  funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable  $X$ . Ako funkcija  $F$  ima inverznu funkciju  $F^{-1}$  definiranu na intervalu  $(0, 1)$ , tada slučajna varijabla  $F^{-1}(Y)$  ima funkciju distribucije  $F$ .*

##### Dokaz

Neka je  $F_X$  funkcija distribucije slučajne varijable  $X = F^{-1}(Y)$ .

Tada

$$F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\{F^{-1}(Y) \leq x\}$$

Kako je  $F$  funkcija distribucije  $\Rightarrow F(X)$  je monotonu rastuća funkcija.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{F(F^{-1}(Y)) \leq F(x)\} \\ &= P\{Y \leq F(x)\} \end{aligned}$$

Izvedimo funkciju distribucije uniformne slučajne varijable na intervalu  $(0, 1)$ :

$$\begin{aligned} x < 0 & \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = 0 \\ 0 < x < 1 & \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ & \quad = \int_0^x 1dt = x \\ x \geq 1 & \quad F(x) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = 0 + 1|_0^1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

Kako je  $Y$  uniformna slučajna varijabla na intervalu  $(0, 1)$  slijedi da je

$$F_X(x) = P\{Y \leq F(x)\} = F(x).$$

□

Na temelju te propozicije možemo generirati slučajnu varijablu  $X$  iz neprekidne funkcije distribucije  $F$  tako da uzmemo slučajan broj  $Y$  i postavimo  $X = F^{-1}(Y)$ .

**Primjer 4.1** *Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane eksponencijalnom distribucijom inverznom metodom.*

*Iz funkcije gustoće (2) izvedimo prvo funkciju distribucije:*

$$\begin{aligned}
 x < 0 \quad F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0 \\
 x \geq 0 \quad F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} \right) e^{-\lambda t} \Big|_0^x = -(e^{-\lambda x} - 1) = 1 - e^{-\lambda x} \\
 F(x) &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Odredimo  $F^{-1}(U)$ :

$$1 - e^{-\lambda x} = u$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - u)$$

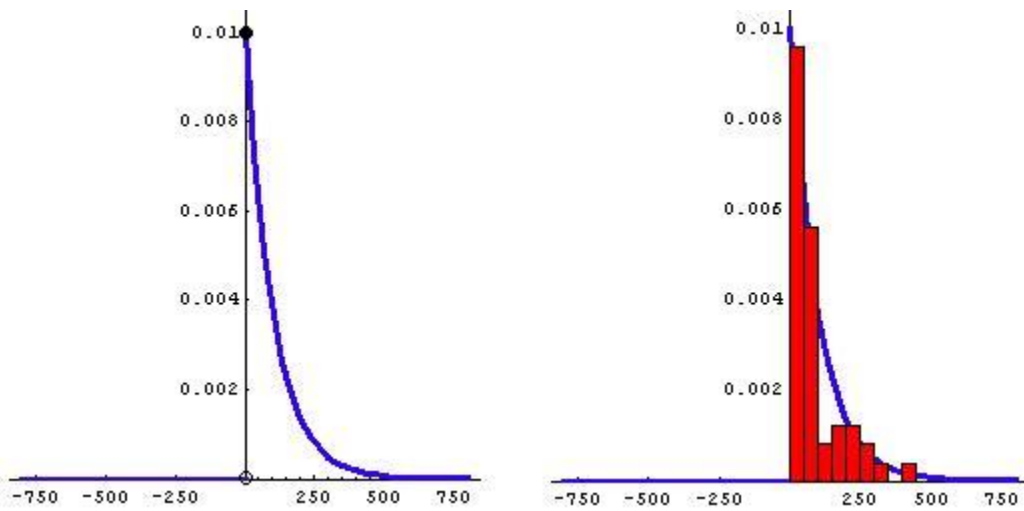
Ako je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $(0,1)$  tada  $F^{-1}(U) = -\frac{1}{\lambda} \log(1 - U)$

*Mathematica program:*

```

\lambda= 0.01;
f[x_]:= \lambda * e^{-\lambda x} * UnitStep[x];
g1 = Plot[f[x], {x, -800, 0}, PlotRange -> {0, 0.0105},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
g2 = Plot[f[x], {x, 0, 800}, PlotRange -> {0, 0.0105},
  AspectRatio -> 1, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.01]};
Show[g1, g2]
UzorakE=Table[Random[], {50}];
G[x_]:= (1/\lambda) * Log[1/(1 - x)];
TransformiraniUzorakE=G[UzorakE];
d = Histogram[TransformiraniUzorakE, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Show[g1, g2, d]

```



Slika 12: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane eksponencijalnom distribucijom s parametrom  $\lambda = 0.01$  (inverzna transformacija)

**Primjedba 4.1** Ako je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $(0, 1)$  onda iz Primjera 4.1 vidimo da je  $F^{-1}(U) = -\log(1-U)$  eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom 1. Kako je  $1-U$  isto uniformno distribuirana na  $(0, 1)$  slijedi da  $-\log U$  je eksponencijalna s parametrom 1. Ako je  $X$  eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom  $\lambda = 1$  onda je njena funkcija gustoće  $f$  zadana izrazom:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

Odredimo očekivanje eksponencijalne distribucije s parametrom 1:

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = e^{-x} dx \\ du = dx \quad v = -e^{-x} \end{array} \right| \\ &= -x e^{-x} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-x}) dx = -\lim_{a \rightarrow \infty} (x e^{-x}) \Big|_0^a + \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-x} dx \\ &= -\lim_{a \rightarrow \infty} (a e^{-a}) + \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^a = 0 + \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-a} + e^0) = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Koristili smo da vrijedi  $\lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-a} = 0$ , pa pokažimo da to zaista vrijedi:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-a} = (\infty \cdot 0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{e^a} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right)^{(L'H)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^a} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Vrijedi da je  $cX$  eksponencijalna s očekivanjem  $c$  kada je  $X$  eksponencijalna sa očekivanjem 1. Da bi to pokazali koristimo jedno svojstvo matematičkog očekivanja, linearnost.

$$E[cX] = cEX = c \cdot 1 = c$$

Slijedi da je i  $-c \log U$  eksponencijalna slučajna varijabla s očekivanjem  $c$ .

**Primjer 4.2** Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane Laplaceovom distribucijom inverznom metodom.

Iz funkcije gustoće (3) izvedimo prvo funkciju distribucije:

$$\begin{aligned}
 x < 0 \quad F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} \Big|_{-\infty}^x \\
 &= \frac{1}{2} (e^{\lambda x} - \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{\lambda t}) = \frac{1}{2} e^{\lambda x} \\
 \\
 x \geq 0 \quad F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{2} \lambda e^{\lambda t} dt + \int_0^x \frac{1}{2} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda \int_0^x e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lambda \left( -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right) \Big|_0^x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (e^{-\lambda x} - 1) \\
 &= 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} \\
 \\
 F(x) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{2} e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ \frac{1}{2} e^{\lambda x} & , x < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Odredimo  $F^{-1}(U)$ :

Ako je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $(0,1)$  tada

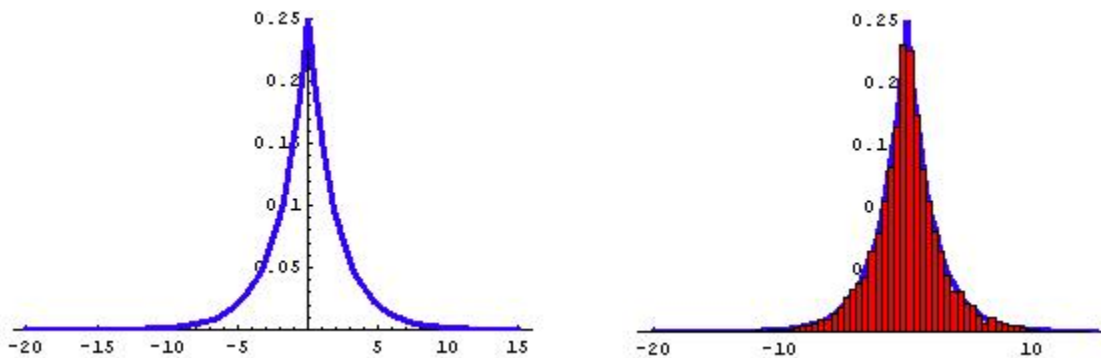
$$F^{-1}(U) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} \log(2(1-U)) & , U \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\lambda} \log(2U) & , U < \frac{1}{2} \end{cases}$$

*Mathematica program:*

```

\ [Lambda] = 0.5;
U1 = Table[Random[Real, {0, 0.5}], {5000}];
U2 = Table[Random[Real, {0.5, 1}], {5000}];
G1[x_] := (-1)/\ [Lambda]*Log[2(1 - x)]
G2[x_] := 1/\ [Lambda]*Log[2 x]\
E1 = G1[U2];
E2 = G2[U1];
TransformiraniUzorakE = Join[E1, E2];
d = Histogram[TransformiraniUzorakE, HistogramScale -> 1, AspectRatio -> 1];
Ldist = LaplaceDistribution[0, 2] ;
g = Plot[PDF[Ldist, x], {x, -20, 15}, PlotRange -> {0, 0.25},
        AspectRatio -> 0.6, PlotStyle -> {Hue[0.7], Thickness[0.015]};
Show[g,d]

```



Slika 13: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane dvostruko eksponencijanom distribucijom s paramterom  $\lambda = 0.5$  (inverzna transformacija)

**Primjer 4.3** *Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane Cauchyjevom distribucijom inverznom metodom.*

*Iz funkcije gustoće (5) izvedimo prvo funkciju distribucije:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \arctan t \Big|_{-\infty}^x = \frac{1}{\pi} \arctan x - \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$$

*Odredimo  $F^{-1}(U)$ :*

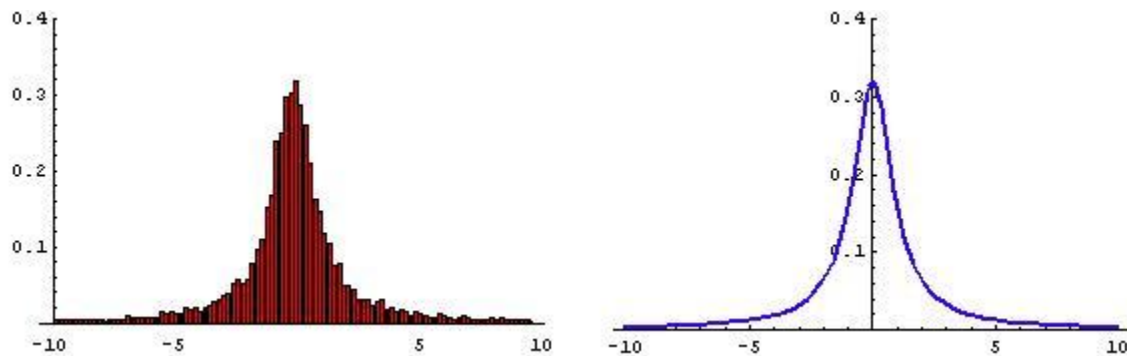
*Ako je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $(0,1)$  tada*

$$F^{-1}(U) = \tan\left(\pi\left(U - \frac{1}{2}\right)\right)$$

*Mathematica program:*

```
U = Table[Random[], {10000}];
G[x_] := Tan[\[Pi](x - 1/2)]
TransformiraniUzorak = G[U];
frekvencije = BinCounts[TransformiraniUzorak, {-10, 10, 0.2}]
BarChart[frekvencije]
relativnefrekvencije = N[frekvencije/(10000*0.2)];
labels = Table[i, {i, -10, 10, 0.2}];
h = BarChart[relativnefrekvencije, PlotRange -> {0, 0.4},
  BarLabels -> labels, AspectRatio -> 0.6]
```

**Primjedba 4.2** *Ova metoda ima široku primjenu u simuliranju slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable, ali ponekad postupak može biti složen ako je inverz funkcije nemoguće riješiti. Stoga postoje još neke metode.*



Slika 14: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane jediničom cauchyjevom distribucijom (inverzna transformacija)

## 4.2. Metoda odbacivanja

Neka je  $g(x)$  funkcija gustoće slučajne varijable. Neka je  $f$  funkcija gustoće neke slučajne varijable takva da postoji konstanta  $c > 0$  sa svojstvom da je  $\frac{f(y)}{g(y)} \leq c$  za svaki  $y$  takav da je  $g(y) > 0$ . Slijedi tehnika za simuliranje slučajne varijable zadane funkcijom gustoće  $f$ .

### Algoritam

1. Simuliramo slučajnu varijablu  $Y$  koja je zadana funkcijom gustoće  $g$
2. Simuliramo slučajan broj  $U$
3. Ako je  $U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}$  postavimo  $X = Y$ , inače se vratimo na korak 1

**Propozicija 4.2** *Slučajna varijabla  $X$  generirana metodom odbacivanja ima funkciju gustoće  $f$ .*

### Dokaz

Neka je  $X$  dobivena vrijednost.

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq x\} &= P\{Y \leq x | U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\} \\
 &= \frac{P\{Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\}}{P\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\}}
 \end{aligned}$$

Da bi dalje nastavili sa dokazom, potrebno je pokazati da vrijedi

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y = y)f_Y(y)dy,$$

gdje je E proizvoljan događaj, Y neprekidna slučajna varijabla, a  $f_Y(y)$  funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable Y. Definiramo indikator slučajnu varijablu X

$$X = \begin{cases} 1 & , \text{ ako se E dogodi} \\ 0 & , \text{ ako se događaj E ne dogodi} \end{cases}$$

Iz definicije od X slijedi

$$\begin{aligned} E[X] &= P(E), \\ E[X|Y = y] &= P(E|Y = y), \quad \text{za bilo koju slučajnu varijablu Y} \end{aligned}$$

Važno svojstvo uvjetnog očekivanja kaže da za sve slučajne varijable X i Y vrijedi

$$E[X] = E[E[X|Y]].$$

Ako je Y neprekidna slučajna varijabla vrijedi

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y = y]f_Y(y)dy$$

Slijedi upravo ono što smo htjeli pokazati:

$$P(E) = \int_{-\infty}^{\infty} P(E|Y = y)f_Y(y)dy$$

Primjenimo to sada u dokazu, gdje je slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće  $g$ :

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P\{Y \leq x, U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}|Y = y\}g(y)dy}{P\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x \frac{f(y)}{cg(y)}g(y)dy}{P\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\}} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^x f(y)dy}{P\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\}c} \end{aligned}$$

Kad pustimo  $x \rightarrow \infty$  dobijemo da je  $P\{U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}\} = \frac{1}{c}$ . Slijedi da je

$$P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(y)dy$$

□

**Primjedba 4.3** Iz algoritma slijedi da će ova metoda generirati traženu slučajnu varijablu s vjerojatnošću

$$P(U \leq \frac{f(Y)}{cg(Y)}) = \frac{1}{c}.$$

Odatle slijedi da broj iteracija ima geometrijsku razdiobu s parametrom  $\frac{1}{c}$ , pa je očekivani broj iteracija jednak  $c$ .

**Primjer 4.4** Koristeći metodu odbacivanja generirajmo slučajnu varijablu zadanu funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 12x(1-x)^2 & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \leq 0 \text{ ili } x \geq 1 \end{cases}$$

To je zapravo neprekidna slučajna varijabla zadana beta distribucijom s paramterima  $p = 2$  i  $q = 3$ . Promotrimo metodu odbijanja sa

$$g(x) = 1, \quad 0 < x < 1$$

Odredimo konstantu  $c$  takvu da zadovoljava  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 12x(1-x)^2$$

Trebamo odrediti maksimalnu vrijednost  $c$  za koji je  $\frac{f(x)}{g(x)} = c$ , tj. maksimum funkcije  $\frac{f(x)}{g(x)}$  što je nultočka njezine prve derivacije. Prvo deriviramo desnu stranu jednakosti:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right] = 12(1-x)^2 - 24x(1-x)$$

Zatim izjednačimo sa 0 da bi odredili kad se postiže maksimalna vrijednost. Postiže se kad je  $x = \frac{1}{3}$ . Stoga,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq 12 \left( \frac{1}{3} \right) \left( 1 - \frac{1}{3} \right)^2 = \frac{16}{9} \equiv c$$

Dakle,

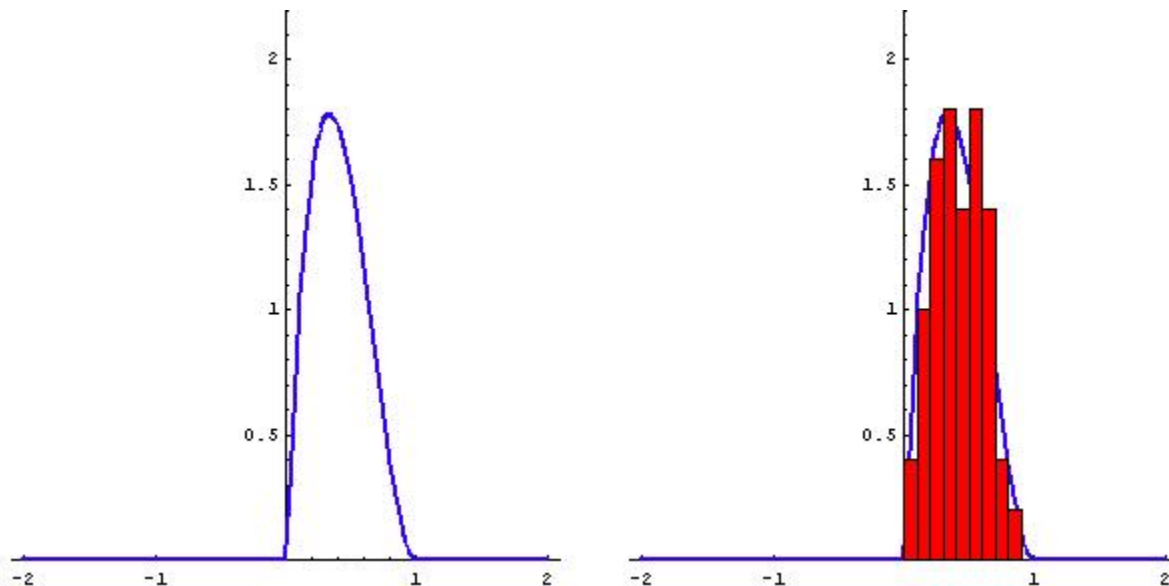
$$\frac{f(x)}{cg(x)} = 12x(1-x)^2 \left( \frac{9}{16} \right) = \frac{27}{4}x(1-x)^2$$

*Mathematica program za metodu odbacivanja za generiranje jedne slučajne varijable:*

```
(Label[begin];
U1 = Random[];
U2 = Random[];
If[U2 <= 27/4*U1*(1 - U1)^2, X = U1, Goto[begin]])
```

*Mathematica program za metodu odbacivanja za generiranje slučajnog uzorka dimenzije 50:*

```
n = 1;
While[n < 100,
(Label[begin];
U[n] = Random[];
U[n + 1] = Random[];
If[U[n + 1] <= 27/4*U[n]*(1 - U[n])^2, X = U[n], Goto[begin]]);
n = n + 2];
Print[X];
```



Slika 15: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane beta distribucijom s paramterima  $p = 2$  i  $q = 3$  (metoda odbacivanja)

**Primjer 4.5** *Koristeći metodu odbacivanja simulirajmo standardnu normalnu slučajnu varijablu  $X$  koja ima funkciju gustoće (4). No, mi ćemo gledati apsolutnu vrijednost, pa funkcija gustoće glasi*

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad 0 < x < \infty$$

*Simulaciju izvodimo metodom odbacivanja sa*

$$g(x) = e^{-x}, \quad 0 < x < \infty$$

Odredimo konstantu  $c$  takvu da zadovoljava  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}}{e^{-x}} = \sqrt{\frac{4}{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}+x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2+2x+1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{e} \cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2e}{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \equiv c \end{aligned}$$

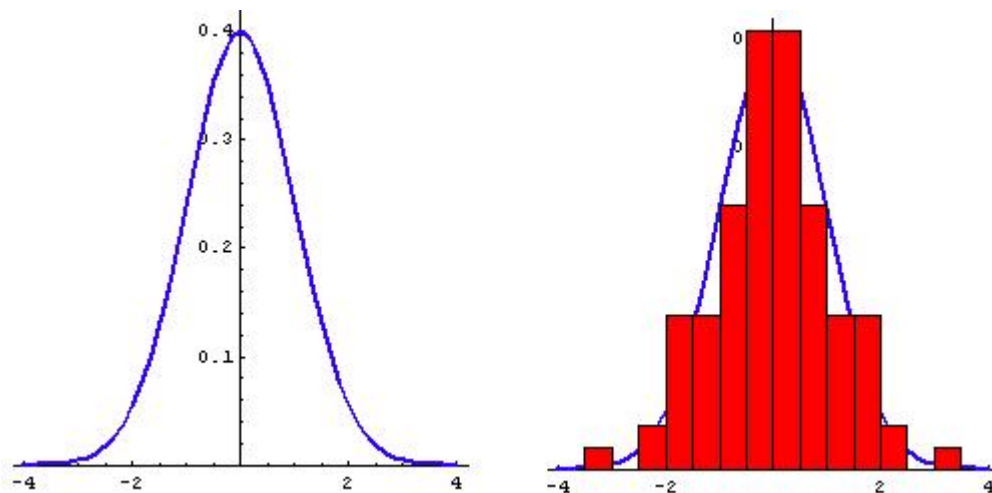
Dakle,

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2e}{\pi}}}\sqrt{\frac{2e}{\pi}}e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} = e^{-\frac{(x+1)^2}{2}}$$

Mathematica program za metodu odbacivanja za generiranje slučajnog uzorka dimenzije 98:

```
n = 1;
While[n < 50,
  (Label[begin];
   U[n] = Random[];
   Uz[n] = Random[];
   Y[n] = -Log[1 - Uz[n]];
   If[U[n] > \[ExponentialE]^((-Y[n] - 1)^2/2), Goto[begin]] ;
   X = Y[n];
   Print[X] ); n = n + 1]
```

Kako smo uzeli apsolutnu vrijednost od  $X$  uzimamo u obzir i  $X$  i  $-X$ . Slika 16 prikazuje jednu takvu simulaciju.

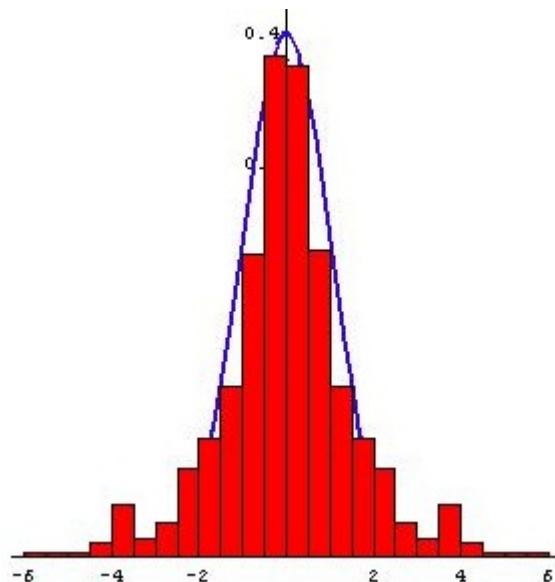


Slika 16: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane normalnom distribucijom s parametrima  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1$  (metoda odbacivanja)

Primjetimo da  $U \leq e^{-\frac{(Y-1)^2}{2}}$  možemo zapisati kao  $-\log U \geq \frac{(Y-1)^2}{2}$  i iz Primjedbe 4.1 slijedi da  $-\log U$  je eksponencijalna distribucija sa parametrom 1. Pa možemo transformirati algoritam tako da generiramo dvije eksponencijalne slučajne varijable  $Y_1$  i  $Y_2$  s parametrom 1. Uzmimo sve to u obzir i napravimo program.

Mathematica program za metodu odbacivanja za generiranje slučajnog uzorka dimenzije 598:

```
n = 1;
While[n < 300,
  (Label[begin];
   U1[n] = Random[];
   U2[n] = Random[];
   Y1[n] = -Log[1 - U1[n]];
   Y2[n] = -Log[1 - U2[n]];
   If[Y2[n] < (Y1[n] - 1)^2/2, Goto[begin]] ;
   X = Y2[n] - (Y1[n] - 1)^2/2;
   Print[X] ;
   Print[-X]);
  n = n + 1]
```



Slika 17: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane normalnom distribucijom s parametrima  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1$  (metoda odbacivanja)

### 4.3. Parametrizacija

Izrecimo prvo definicije koje će nam biti potrebne u promatranju ove metode.

**Definicija 4.3** *Neka je  $X$  neprekidna pozitivna slučajna varijabla s funkcijom distribucije  $F$ . Repna funkcije distribucije definirana je s  $\bar{F} = P(X > t) = 1 - F(t)$*

**Definicija 4.4** *Intenzitet hazarda funkcije distribucije  $F$  definiran je sa*

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = -\frac{d}{dt}(\log \bar{F}(t))$$

Neka je  $F$  neprekidna funkcija distribucije s pripadnom repnom funkcijom distribucije za koju je  $\bar{F}(0) = 1$ . Neka je  $\lambda(t)$  intenzitet hazarda

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \quad t \geq 0$$

Pretpostavimo da imamo omeđenu funkciju  $\lambda(t)$  i želimo simulirati slučajnu varijablu  $S$  koja ima  $\lambda(t)$  kao svoju parametarsku funkciju. Stoga neka  $\lambda$  bude takva da  $\lambda(t) \leq \lambda, \forall t \geq 0$ . Generiramo dvije slučajne varijable  $U_i, X_i, i \geq 1$ , gdje je  $U_i$  uniformna  $(0, 1)$ , a  $X_i$  eksponencijalna sa parametrom  $\lambda$ . Zaustavljamo se kad

$$N = \min \left\{ n : U_n \leq \lambda \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) / \lambda \right\}$$

Postavimo

$$S = \sum_{i=1}^N X_i$$

Da bi izračunali  $E[N]$  trebamo Waldovu jednadžbu.

**Definicija 4.5** *Cjelobrojna slučajna varijabla  $N$  je vrijeme zaustavljanja za niz  $X_1, X_2, \dots$  ako je događaj  $\{N = n\}$  nezavisan od  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots \forall n = 1, 2, \dots$*

**Propozicija 4.3** *(Waldova jednadžba) Ako su  $X_1, X_2, \dots$  nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable sa konačnim očekivanjem, i ako je  $N$  vrijeme zaustavljanja za  $X_1, X_2, \dots$  takvo da  $E[N] < \infty$ , tada*

$$E \left[ \sum_{1}^N X_n \right] = E[N]E[X_1]$$

**Dokaz**

Neka je

$$I_n = \begin{cases} 1 & , N \geq n \\ 0 & , N < n \end{cases}$$

Imamo

$$\sum_{n=1}^N X_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n$$

Stoga,

$$E \left[ \sum_{n=1}^N X_n \right] = E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} X_n I_n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n I_n]$$

$I_n = 1$  ako i samo ako nismo stali nakon promatranja  $X_1, \dots, X_{n-1}$ . Prema tome,  $I_n$  je određen sa  $X_1, \dots, X_{n-1}$  i stoga nezavisan sa  $X_n$ . Slijedi:

$$\begin{aligned} E \left[ \sum_{n=1}^N X_n \right] &= \sum_{n=1}^{\infty} E[X_n] E[I_n] \\ &= E[X_1] \sum_{n=1}^{\infty} E[I_n] \\ &= E[X_1] E \left[ \sum_{n=1}^{\infty} I_n \right] \\ &= E[X_1] E[N] \quad \square \end{aligned}$$

Sada kada smo dokazali Waldovu jednadžbu vratimo se natrag na metodu. Kako je

$$N = \min \left\{ n : U_n \leq \lambda \left( \sum_{i=1}^n X_i \right) / \lambda \right\}$$

slijedi da je događaj  $\{N = n\}$  nezavisan sa  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ . Prema Walovoj jednadžbi

$$E[S] = E[N]E[X_i]$$

Kako je  $X_i$  eksponencijalna slučajna varijabla sa funkcijom gustoće  $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$

Određimo matematičko očekivanje:

$$\begin{aligned} E[X_i] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X_i}(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 dx + \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \left. \begin{array}{l} t = \lambda x \\ dt = \lambda dx \\ dx = \frac{dt}{\lambda} \end{array} \right| = 0 + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} t e^{-t} dt \\ &= \left. \begin{array}{l} u = t \\ du = dt \\ v = -e^{-t} \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda} \left( -te^{-t} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) dt \right) = \frac{1}{\lambda} \left( -\lim_{a \rightarrow \infty} (te^{-t}) \Big|_0^a + \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a e^{-t} dt \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left( - \lim_{a \rightarrow \infty} (ae^{-a}) + \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-t}) \Big|_0^a \right) = \frac{1}{\lambda} \left( 0 + \lim_{a \rightarrow \infty} (-e^{-a} + e^0) \right) = \frac{1}{\lambda} (0 + 1) = \frac{1}{\lambda}$$

Koristili smo da vrijedi  $\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$ , pa pokažimo da to zaista vrijedi:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = (\infty \cdot 0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{e^a} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{(L'H)} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{e^a} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$E[X_i] = \frac{1}{\lambda} \tag{8}$$

Stoga,

$$E[S] = \frac{E[N]}{\lambda}$$

tj.

$$E[N] = \lambda E[S]$$

gdje je  $E[S]$  matematičko očekivanje željene slučajne varijable.

**Primjer 4.6** *Neka su  $X_n, n = 1, 2, \dots$  nezavisne slučajne varijable takve da  $P\{X_n = 0\} = P\{X_n = 1\} = \frac{1}{2}, n = 1, 2, \dots$ .  $N$  je vrijeme zaustavljanja ako vrijedi  $N = \min\{n : X_1 + \dots + X_n = 10\}$ . Na  $N$  možemo gledati kao na vrijeme zaustavljanja nekog eksperimenta, recimo bacamo pravilni novčić i zaustavimo se kad broj bačenih glava dosegne 10.*

## 5. Specijalne tehnike simuliranja neprekidne slučajne varijable

Prije primjera potrebna nam je jedna definicija.

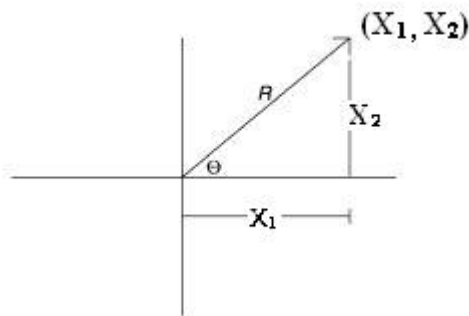
**Definicija 5.1** Za slučajni vektor  $X = (X_1, \dots, X_n)$  funkciju distribucije od  $X$  često označavamo sa  $F_{X_1, \dots, X_n}$  i zovemo zajednička funkcija distribucije od  $X_1, \dots, X_n$ , a funkciju gustoće od  $X$  često označavamo sa  $f_{X_1, \dots, X_n}$  i zovemo zajednička gustoća od  $X_1, \dots, X_n$ .

**Primjer 5.1** (Polarna metoda za generiranje normalne slučajne varijable)

Neka su  $X_1$  i  $X_2$  neprekidne standardne normalne slučajne varijable sa funkcijama gustoće (4). Kako su  $X_1$  i  $X_2$  nezavisne, njihova zajednička funkcija gustoće je produkt individualnih funkcija gustoće:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x_1^2 + x_2^2)}{2}}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Sa  $R$  i  $\Theta$  označimo polarne koordinate vektora  $(X_1, X_2)$  za koje vrijedi (slika 18).



Slika 18:

$$\begin{aligned} R^2 &= X_1^2 + X_2^2 \\ \Theta &= \tan^{-1} \frac{X_2}{X_1} \end{aligned}$$

Da bi zadržali zajedničku funkciju gustoće od  $R^2$  i  $\Theta$  pogledajmo transformaciju:

$$d = x_1^2 + x_2^2, \quad \Theta = \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1}$$

Jacobijan ove transformacije je:

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} \frac{\partial d}{\partial x_1} & \frac{\partial d}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \left(-\frac{x_2}{x_1^2}\right) & \frac{1}{1+\frac{x_2^2}{x_1^2}} \cdot \left(\frac{1}{x_1}\right) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ \frac{-x_2}{x_1^2+x_2^2} & \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \end{vmatrix} = \frac{2x_1^2}{x_1^2+x_2^2} + \frac{2x_2^2}{x_1^2+x_2^2} \\ &= \frac{2(x_1^2+x_2^2)}{x_1^2+x_2^2} = 2 \neq 0 \end{aligned}$$

Uz te uvjete odredimo zajedničku funkciju gustoće od  $R^2$  i  $\Theta$ .

$$\begin{aligned} f_{R^2, \Theta}(d, \theta) &= f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) J^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{2\pi}, \quad 0 < d < \infty, 0 < \theta < 2\pi \end{aligned}$$

Iz tog možemo zaključiti da su  $R^2$  i  $\Theta$  nezavisne, i  $R^2$  ima eksponencijalnu distribuciju sa parametrom  $\frac{1}{2}$ , a  $\Theta$  ima uniformnu distribuciju na intervalu  $(0, 2\pi)$ .

Sljedeći pristup generiranju standardne slučajne varijable zove se Box-Muller pristup. Krenimo obrnuto od polarnih prema pravokutnim koordinatama. Ako nam  $W$  predstavlja  $R^2$ , a  $V$  predstavlja  $\Theta$ , onda su  $X_1 = \sqrt{W} \cos V$ ,  $X_2 = \sqrt{W} \sin V$  nezavisne standardne normalne slučajne varijable. Ako  $U_1$  i  $U_2$  predstavljaju nezavisne uniformne slučajne brojeve na  $(0, 1)$ , tada su

$$X_1 = (-2 \log U_1)^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi U_2) \quad (9)$$

$$X_2 = (-2 \log U_1)^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi U_2) \quad (10)$$

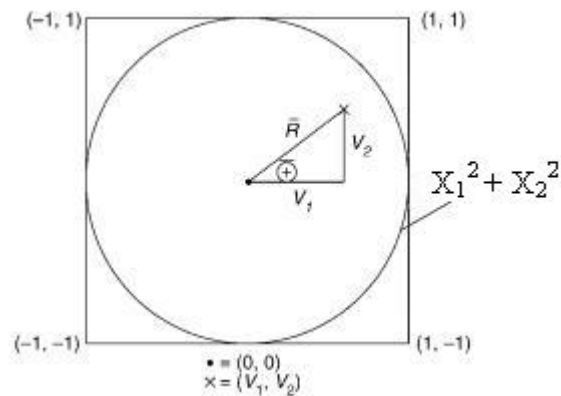
nezavisne standardne normalne slučajne varijable.

Sljedeći pristup u kojem se izbjegava računanje sinusa i kosinusa naziva se polarna metoda. Ako je  $U$  uniformna slučajna varijabla na  $(0, 1)$ , tada je  $2U$  uniformna na  $(0, 2)$ , dok je  $2U - 1$  uniformna na intervalu  $(-1, 1)$  Stoga, ako generiramo slučajne brojeve  $U_1$  i  $U_2$  i postavimo  $V_1 = 2U_1 - 1$  i  $V_2 = 2U_2 - 1$ , tada  $(V_1, V_2)$  je uniformno distribuiran na kvadratu površine 4 sa središtem u  $(0, 0)$  (Slika 19).

Ponavljajmo generiranje para  $(V_1, V_2)$  sve dok nije sadržan u krugu radijusa 1 sa centrom u  $(0, 0)$ , tj.  $V_1^2 + V_2^2 \leq 1$ . Iz tog slijedi da je par  $(V_1, V_2)$  uniformno distribuiran na tom krugu. Označimo sa  $\bar{R}$  i  $\bar{\Theta}$  polarne koordinate ovog para. Može se provjeriti da su  $\bar{R}$  i  $\bar{\Theta}$  nezavisne<sup>4</sup> i  $\bar{R}^2$  uniformno distribuirana na  $(0, 1)$  i  $\bar{\Theta}$  uniformno distribuirana na  $(0, 2\pi)$

<sup>4</sup>Neka je  $(X, Y)$  neprekidan slučajan vektor s gustoćom  $f_{(X, Y)}(x, y)$  i neka su  $f_X(x)$  i  $f_Y(y)$  njegove marginalne funkcije gustoće. Slučajne varijable  $X$  i  $Y$  su nezavisne ako vrijedi

$$f_{(X, Y)}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$



Slika 19:

Iz (Slike 19) iščitamo  $\sin \bar{\Theta}$  i  $\cos \bar{\Theta}$ .

$$\sin \bar{\Theta} = \frac{V_2}{\bar{R}} = \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}, \quad \cos \bar{\Theta} = \frac{V_1}{\bar{R}} = \frac{V_1}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} \quad (11)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (10) u jednadžbe (8) i (9) dobijemo nezavisne standardne normalne varijable  $X$  i  $Y$ .

$$X = (-2 \log U)^{\frac{1}{2}} \frac{V_1}{\bar{R}}, \quad Y = (-2 \log U)^{\frac{1}{2}} \frac{V_2}{\bar{R}}$$

Sa  $S$  možemo označiti  $\bar{R}^2$ , tj.  $S = \bar{R}^2 = V_1^2 + V_2^2$ . Kako je  $\bar{R}^2$  uniformno distribuirana na  $(0, 1)$ , umjesto generiranja novog slučajnog broja možemo uzeti taj. Slijedi,

$$X = (-2 \log \bar{R}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{V_1}{\bar{R}} = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_1,$$

$$Y = (-2 \log \bar{R}^2)^{\frac{1}{2}} \frac{V_2}{\bar{R}} = \sqrt{\frac{-2 \log S}{S}} V_2$$

su nezavisne standardne normalne slučajne varijable.

Slijedeći program generira par nezavisnih standardnih normalnih slučajnih varijabli:

```
(Label[begin];
  U1 = Random[] ;
  U2 = Random[] ;
  V1 = 2U1 - 1;
  V2 = 2U2 - 1;
  S = V1^2 + V2^2;
  If[S > 1, Goto[begin]];
  X = ((-2Log[S])/S)^(1/2)*V1;
  Y = ((-2Log[S])/S)^(1/2)*V2;
```

```

Uzorak = {X, Y};
Print[X];
Print[Y];
Print[Uzorak])

```

**Primjedba 5.1** U Primjeru 4.5, tj. simulaciji slučajnog uzorka iz standardne normalne distribucije metodom odbacivanja, prosječan broj ponavljanja generiranja slučajnih brojeva jednak je  $c = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \approx 1.315489$ , a u ovom primjeru (Primjer 5.1) polarna metoda zahtjeva u prosjeku  $\frac{4}{\pi} = 1.273$  ponavljanja generiranja  $U_1$  i  $U_2$ .

**Primjer 5.2** Za simulaciju iz gama distribucije sa parametrima  $(n, \lambda)$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$ , koristimo činjenicu da suma  $n$  nezavisnih eksponencijalnih slučajnih varijabli sa parametrom  $\lambda$  imaju gama distribuciju. Stoga ako su  $U_1, \dots, U_n$  nezavisne uniformne slučajne varijable na  $(0, 1)$  onda

$$X = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \log U_i = -\frac{1}{\lambda} \log \left( \prod_{i=1}^n U_i \right)$$

imaju željenu distribuciju. Međutim kada je  $n$  velik, postoje druge tehnike za simulaciju koje ne zahtjevaju toliko slučajnih brojeva. Jedna od mogućnosti je korištenje metode odbacivanja sa  $g(x)$  kao funkcijom gustoće eksponencijalne slučajne varijable sa očekivanjem  $\frac{n}{\lambda}$ . Već smo pokazali da vrijedi (8) tj. očekivanje slučajne varijable zadane eksponencijalnom distribucijom iznosi  $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ . Slijedi, da je  $g(x)$  jednak funkciji gustoće eksponencijalne slučajne varijable s parametrom  $\frac{\lambda}{n}$ .

$$g(x) = \frac{\lambda}{n} e^{-\frac{\lambda}{n}x} \quad (12)$$

Pretpostavimo da želimo generirati slučajnu varijablu zadanu gama-distribucijom s parametrima  $(1, 1)$ . To znači da želimo generirati slučajnu varijablu zadanu funkcijom gustoće:

Uvrstimo parametre u (6) i dobijemo

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1)1^1} x^{1-1} e^{-\frac{x}{1}} = \frac{1}{\Gamma(1)} e^{-x}$$

gdje je

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{1-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = -(e^{-\infty} - e^0) = 1$$

Stoga slijedi:

$$f(x) = e^{-x}$$

Odredimo konstantu  $c$  tako da zadovoljava  $\frac{f(x)}{g(x)} \leq c$

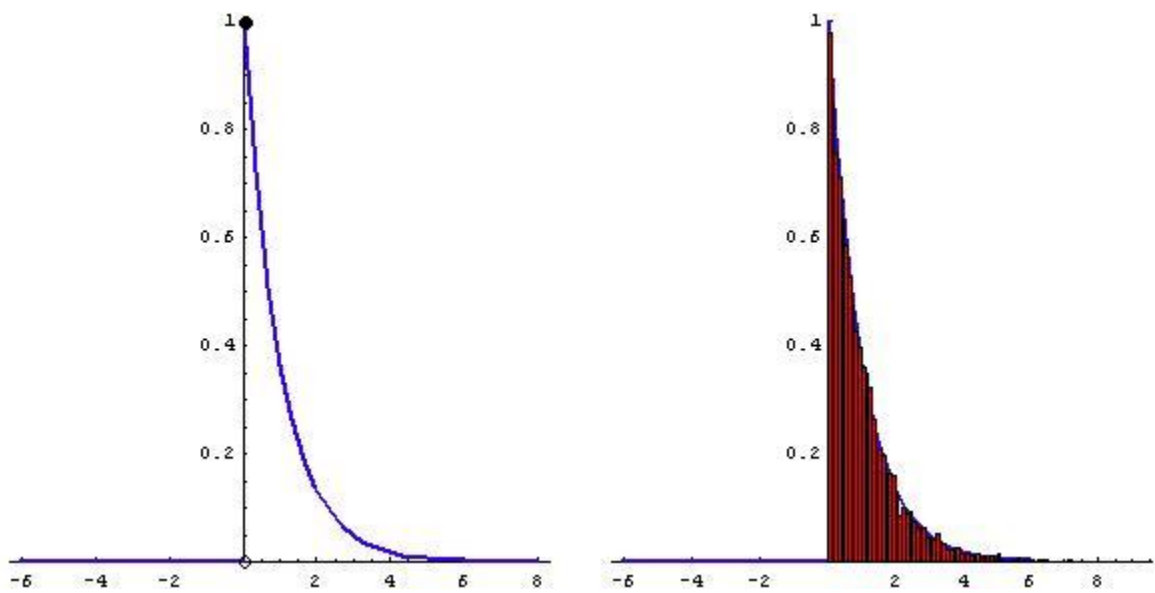
$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \leq 1 \equiv c$$

Dakle,

$$\frac{f(x)}{cg(x)} = \frac{e^{-x}}{1 \cdot e^{-x}} = 1$$

*Mathematica* program za metodu odbacivanja za generiranje slučajnog uzorka od 10000 slučajnih varijabli:

```
(Label[Begin];  
\[Lambda] = 1; n = 1;  
U = Table[Random[], {10000}];  
Uz = Table[Random[], {10000}];  
G[x_] = (-1/\[Lambda])*Log[1 - x];  
Y1 = G[Uz];  
If[U > 1, Label[Begin]]; X = Y1;)
```



Slika 20: Simulacija slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable zadane gama-distribucijom s paramterima  $n = 1$  i  $\lambda = 1$  (metoda odbacivanja)

## **6. Zaključak**

Danas se simulacija primjenjuje na gotovo svim područjima društvenih djelatnosti u najširem smislu te riječi. Recimo primjenom metode simulacije brojnih mogućih stanja poslovnog sustava u budućnosti, jednako kao i statističkom obradom dobijenih nizova, moguće je preciznije i transparentnije kvantificirati stvarnu mjeru kreditnih rizika, tj. rizika nemogućnosti povratka duga.

Cilj ovog završnog rada je bio kroz opisane metode generiranja, ponajprije slučajnih brojeva, zatim neprekidnih slučajnih varijabli te konačno i primjera za simulacije zajedno sa kratkim programima, uvesti zainteresiranog čitatelja u simulacije slučajnog uzorka iz neprekidne slučajne varijable.

## Literatura

- [1] S. M. ROSS, *Introduction to Probability Models*, Elsevier, University of California, 2007.
- [2] R. C. MITTELHAMMER, *Mathematical Statistics for Economics and Business*, Springer, 1996
- [3] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.
- [4] S. M. ROSS, *Simulation*, Elsevier, University of California, 2006.
- [5] [http://web.math.hr/~amimica/files/opvis\\_vjezbe.pdf](http://web.math.hr/~amimica/files/opvis_vjezbe.pdf)