

# Težinski problem mjerenja u $l_\infty$ -normi

Zadani su podaci mjerenja  $(\omega_i, y_i)$ ,  $i \in I$ ,  $I = \{1, \dots, m\}$ ,  $\omega_i > 0$ . Treba pronaći najbolju aproksimaciju mjerene veličine tako da najveće težinsko odstupanje bude minimalno, tj. odrediti minimum funkcije

$$\Delta(c) = \max_{i \in I} \omega_i |c - y_i| \rightarrow \min_{c \in \mathbb{R}}. \quad (1)$$

Specijalno ako je  $\omega_1 = \dots = \omega_m = 1$ , rješenje problema mjerenja (1) je jednostavno:

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \Delta(c) = \Delta\left(\frac{y_{min} + y_{max}}{2}\right) = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$$

Uz oznaku  $\tilde{y}_i := \omega_i y_i$ , problem minimuma (1) možemo pisati

$$\Delta(c) = \max_{i \in I} |\omega_i c - \tilde{y}_i| \rightarrow \min, \quad \omega_i > 0,$$

a ovo je specijalni slučaj minimax rješenja sustava jednačbi s jednom nepoznanicom

$$\max |a_i x - b_i| \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}$$

gdje uvijek možemo pretpostaviti da je  $a_i > 0, \forall i \in I$

# $L_\infty$ aproksimacija rješenja sustava jednažbi s jednom nepoznanicom

$$\Delta(x) = \max_{1 \leq i \leq m} |a_i x - b_i| = \max_{1 \leq i \leq m} |r_i(x)| \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}}$$

$$a_{i+m} = -a_i, \quad r_{i+m} = -r_i$$

$$\delta(x) = \max_{1 \leq i \leq 2m} r_i(x)$$

METODE

# Sustavi linearnih jednažbi s više nepoznanica

Najbolji minimax težinski pravac je specijalni slučaj sustava sa dvije nepoznanice:

$$\max_i \omega_i |ax_i + b - y_i| = \max_i |(\omega_i x_i)a + \omega_i b - \omega_i y_i|$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$r_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - b_i = (a_i, x) - b_i, \quad a_i = [a_{i1}, \dots, a_{in}]$$

$$\Delta(x) = \max_i |r_i(x)|$$

$$\delta(x) = \max_i r_i(x)$$

# Karakterizacija rješenja

Konveksna ljuska skupa  $A$  - najmanji konveksan skup koji sadrži  $A$

$$K(A) = \left\{ \sum_i \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1 \right\}$$

## Teorem (Caratheodory)

Neka je  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Tada se svaki element skupa  $K(A)$  može prikazati kao konveksna kombinacija  $n + 1$  (ili manje) elemenata iz  $A$ .

PRIMJER

$$A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Općenito, teorem kaže da je svaka točka skupa  $K(A)$  u nekom  $d$ -simpleksu,  $d \leq n$  s vrhovima iz  $A$ .

DOKAZ: Neka je  $x \in K(A)$ , tj.

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i, \quad x_i \in A, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1,$$

Za  $k \leq n + 1$ , tvrdnja trivijalna. Neka je  $k > n + 1$ . Tada su vektori

$$x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1$$

linearno zavisni (ima ih  $k - 1 > n$ ) pa  $\exists \mu_2, \dots, \mu_k$  ne svi nula tako da je

$$\sum_{i=2}^k \mu_i (x_i - x_1) = 0. \text{ Označimo } \mu_1 = - \sum_{i=2}^k \mu_i. \text{ Tada}$$

$$0 = \sum_{i=2}^k \mu_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^k \mu_i x_i - x_1 \sum_{i=2}^k \mu_i = \sum_{i=1}^k \mu_i x_i, \quad \sum_{i=1}^k \mu_i = 0$$

pri čemu je barem jedan  $\mu_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Slijedi

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^k \mu_i x_i = \sum_{i=1}^k (\lambda_i x_i - \alpha \mu_i) x_i, \quad \forall \alpha$$

Specijalno za

$$\alpha = \min_{1 \leq i \leq k} \left\{ \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \mu_i > 0 \right\} = \frac{\lambda_j}{\mu_j} > 0$$

je  $\lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  (za  $\mu_i \leq 0$  - očigledno, za  $\mu_i > 0$  iz  $\alpha \leq \frac{\lambda_i}{\mu_i}$ ) i  $\lambda_j - \alpha\mu_j = 0$ , pa

$$x = \sum_{i=1}^k (\lambda_i x_i - \alpha \mu_i) x_i, \quad \lambda_i x_i - \alpha \mu_i \geq 0, \quad \lambda_j - \mu_j x_j = 0, \quad \sum_{i=1}^k (\lambda_i - \mu_i) = 1.$$

Dalje analogno. Postupak se može ponavljati sve dok je  $k > n + 1$ .

## Teorem

Neka je  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  kompaktna. Tada postoji  $z \in \mathbb{R}^n$  tako da je  $(x, z) > 0$ ,  $\forall x \in A$  ako i samo ako  $0 \notin K(A)$ .

Dokaz: Pretpostavimo  $0 \in K(A)$ , tj.  $0 = \sum \lambda_i x_i$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\sum \lambda_i = 1$ ,  $x_i \in A$ . Tada

$$0 = \sum \lambda_i (u_i, z), \quad \forall z,$$

a to nije moguće za  $(u_i, z) > 0$ ,  $\forall i$ .

Obratno, pretpostavimo  $0 \notin K(A)$ . Neka je  $z \in A$  tako da je  $\|z\|_2$  minimalna i  $x \in A$  proizvoljan. Kako je  $\lambda x + (1 - \lambda)z \in K(A)$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ ,

$$0 \leq \|\lambda x + (1 - \lambda)z\|_2^2 - \|z\|_2^2 = \lambda^2 \|x - z\|_2^2 + 2\lambda(x - z, z).$$

No, za male  $\lambda$  prethodna jednakost ne može vrijediti ako nije  $(x - z, z) \geq 0$ , tj.  $(x, z) \geq (z, z) > 0$

## Karakterizacijski teorem za $\delta$

Točka  $z$  je točka minimuma funkcije  $\delta$  ako i samo ako konveksna ljuska skupa  $\{a_i : r_i(z) = \delta(z)\}$  sadrži ishodište.

Dokaz: Pretpostavimo da  $z$  nije točka minimuma funkcije  $\delta$ . Tada za neki  $h$  je  $\delta(z - h) < \delta(z)$ . Označimo  $M = \{i : r_i(z) = \delta(z)\}$ . Tada za  $i \in M$  je

$$r_i(z - h) \leq \delta(z - h) < \delta(z) = r_i(z),$$

a  $r_i(x) = (a_i, x) - b_i$ , pa  $(a_i, z - h) - b_i < (a_i, z) - b_i$ , pa

$$(a_i, h) > 0, \quad i \in M.$$

Iz prethodnog teorema slijedi da ishodište ne pripada konveksnoj ljusci skupa  $\{a_i : r_i(z) = \delta(z)\}$ .

Obratno, pretpostavimo da  $0 \notin K(\{a_i : r_i(z) = \delta(z)\})$ . Tada postoji  $h$  t.d.  $(a_i, h) > 0$  za  $i \in M$ . Tada je  $\alpha = \min_{i \in M} (a_i, h) > 0$ .

Za  $i \in M$  reziduali  $r_i$  padaju u smjeru  $-h$  jer za  $\lambda > 0$

$$r_i(z - \lambda h) = (a_i, z - \lambda h) - b_i = (a_i, z) - b_i - \lambda(a_i, h) \leq \delta(z) - \lambda\alpha.$$

Za  $i \notin M$ ,  $r_i(z) < \delta(z)$  pa zbog neprekidnosti od  $r_i$ , postoji okolina  $U$  od  $z$  tako da  $r_i(u) < \delta(z)$ ,  $z \in U$ .

Dakle,  $z$  nije točka minimuma.

## Karakterizacijski teorem za $\Delta$

Neka je  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma_i = \text{sign} r_i(z)$ ,  $M = \{i : |r_i(z)| = \Delta(z)\}$ . Točka  $z$  je točka minimuma funkcije  $\Delta$  ako i samo ako konveksna ljuska skupa  $\{\sigma_i a_i : i \in M\}$  sadrži ishodište.

## Teorem

Neka je  $z$  točka minimuma funkcije  $\delta(x) = \max_{1 \leq i \leq m} r_i(x)$ . Tada je  $z$  točka minimuma funkcije  $\max_{i \in J} r_i(x)$ , gdje je  $J \subseteq \{1, \dots, m\}$  koji sadrži najviše  $n + 1$  elemenata.

Dokaz: Znamo da  $0 \in K(\{a_i : i \in M\})$ ,  $M = \{i : r_i(z) = \delta(z)\}$ . Ako  $M$  ima najviše  $n + 1$  elemenata, stavimo  $J = M$ . U suprotnom, po Caratheodoryevom teoremu postoji  $J \subseteq M$  koji ima najviše  $n + 1$  elemenata i za koji je  $0 \in K(\{a_i : i \in J\})$ . Prema karakterizacijskom teoremu,  $z$  je točka minimuma funkcije  $\max_{i \in J} r_i(x)$ .

## Teorem - analogon prethodnog za $\Delta$

Svako minimax rješenje sustava  $m$  jednadžbi s  $n$  nepoznanica,  $m > n$  je minimax rješenje odgovarajućeg podsustava od  $n + 1$  jednadžbi.